

# Modelado matemático, simulación, análisis y control de un sistema hidráulico interactivo-tres tanques en serie

Mathematical modeling, simulation, analysis and control of an interactive hydraulic system-three tanks in series

Laura V. Medina S, Gloria A. Contreras G, Olga L. Roa B, Hector M.Vega

## Resumen

**E**n éste trabajo se modela y analiza un sistema hidráulico que está conformado por tres tanques en serie, con un fluido de baja viscosidad y tuberías poco rugosas, sistema interactivo dinámico no lineal; bajo la metodología de sistemas dinámicos. El objetivo es llegar a presentar un control lineal por realimentación del estado basado en el modelo lineal diagonalizado, que mantiene al sistema no lineal controlando los caudales de salida; para esto se hace uso de diferentes métodos de la teoría de control usando el programa de MatLab y su herramienta Simulink y en este se implementa el método numérico para solucionar ecuaciones diferenciales llamado Runge Kutta y el modelo matemático del sistema no lineal para luego analizar su comportamiento a través del tiempo, linealización del sistema y análisis de sensibilidad, presentación de la forma canónica diagonal del modelo linealizado entre otros.

**Palabras clave:** control lineal, sistemas dinámicos, sistema interactivo, sistema lineal, sistema no lineal, Simulink/MatLab, sistema hidráulico.

## Abstract

**I**n this work, a hydraulic system is modeled and analyzed. It consists of three tanks in series, with a fluid of low viscosity and slightly rough pipes, interactive non-linear dynamic system; under the dynamic systems methodology. The objective is to arrive at presenting a linear control by state feedback based on the diagonalized linear model, which keeps the non-linear system controlling the output flows; For this, different methods of control theory are used using the MatLab program and its Simulink tool, and in this the numerical method to solve differential equations called Runge Kutta and the mathematical model of the nonlinear system is implemented to later analyze its behavior over time, linearization of the system and sensitivity analysis, presentation of the diagonal canonical form of the linearized model among others.

**Keywords:** linear control, dynamic systems, interactive system, linear system, non-linear system, Simulink / MatLab, hydraulic system.

Recibido / Received: Febrero 20 del 2017 Aprobado / Aproved: Marzo 20 del 2017

Tipo de artículo / Type of paper: Investigación Científica y Tecnológica Terminada.

Afiliación Institucional de los autores / Institutional Affiliation of authors: Universidad San Buenaventura

Autor para comunicaciones / Author communications: lmedina@usbog.edu.co

Los autores declaran que no tienen conflicto de interés.

## Introducción

A medida que la industria se vuelve más compleja, más importante es el papel de los fluidos en las máquinas industriales. Hace 100 años el agua era el único fluido importante que se transportaba por tuberías. Sin embargo, hoy cualquier fluido se transporta por tuberías durante su producción, proceso, transporte o utilización. La era de la energía atómica y de los cohetes espaciales ha dado nuevos fluidos como son los metales líquidos, sodio, potasio, bismuto y también gases licuados, como oxígeno, nitrógeno, etc.; entre los fluidos más comunes se tiene al petróleo, agua, gases, ácidos y destilados que hoy día se transportan por tuberías. La transportación de fluidos no es la única parte de la hidráulica que ahora demanda nuestra atención, los mecanismos hidráulicos y neumáticos se usan bastante para los controles de los modernos aviones, barcos, equipos automotores, máquinas herramientas, maquinaria de obras públicas y de los equipos científicos de laboratorio donde se necesita un control preciso del movimiento de fluidos (Crane, 1989).

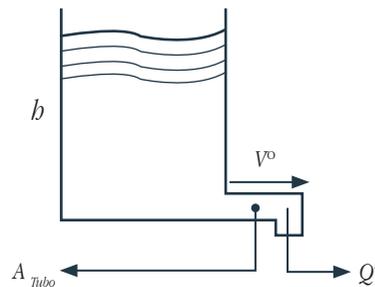
Como el más versátil de la transmisión de señales y de potencia, los fluidos, ya sean líquidos o gases, tienen un extenso uso en la industria. Los líquidos y los gases pueden diferenciarse básicamente por sus incompatibilidades relativas y el hecho de que un líquido puede tener una superficie libre, en zfluidos que usan líquidos y neumática se aplica a aquellos que usan aire o gases. Debido a su frecuencia en la industria, los circuitos hidráulicos y los sistemas hidráulicos constituyen una parte necesaria en la educación de un ingeniero. Muchos de los sistemas hidráulicos son no lineales. Sin embargo, algunas veces es posible linealizar sistemas no lineales de modo que se reduzca su complejidad y se obtengan soluciones que sean suficientemente exactas para muchos propósitos (Ogata, 1987).

## Descripción del Sistema

Un sistema hidráulico es un conjunto de dispositivos que mediante la utilización de un flujo de líquidos permite generar un movimiento el cual puede ser aprovechado en forma de energía. Algunos de los elementos de un sistema hidráulico son:

- La capacitancia del fluido: corresponde al área transversal del elemento que almacena fluido, normalmente tanques y tuberías de gran diámetro. Se denota con  $C_f$  y se define como:  $C_f = \text{Área transversal}$ .
- La resistencia de fluido: esta resistencia hidráulica corresponde a todos aquellos elementos que limitan el paso del flujo, por ejemplo las válvulas y los orificios, además de todos aquellos elementos que causan pérdidas como los tubos de longitud considerable y algunos accesorios. Se denota con  $R_f$  y se define como  $R_f = \text{Limitantes del flujo y pérdidas de presión}$ .
- Válvulas: controlan la presión del fluido y su flujo Vega, (2006).

Figura 1. Sistema de nivel líquido en un tanque



Fuente: Autor

## Ecuación de Bernoulli

A partir de la ecuación de Bernoulli se puede determinar la velocidad de salida del líquido.

$$A = \frac{Q - \ln C_o \ln C_i}{K_{DBO}}$$

(1)

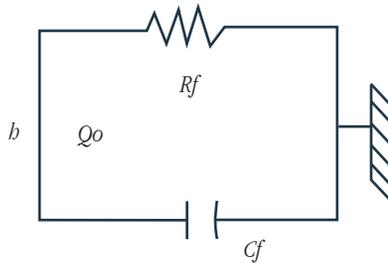
El caudal de salida es  $Q_o$  y el área del tubo se representa por  $A_t$  donde:

$$Q_o = A_t V_o = A_t \sqrt{2gh} = \sqrt{2gh} \frac{\pi}{4} d^2$$

$$Q_o = \frac{\pi}{4} \sqrt{2gh} d^2$$

(2)

**Figura 2.** Circuito hidráulico de un sistema de nivel líquido en un tanque.



Fuente: Autor

De la Fig. 2 se tiene  $\frac{dh}{dt}$ . Si la resistencia de fluido se estima como la relación entre altura de nivel y caudal, se encuentra que:

$$R_f = \frac{b}{Q_0} = \frac{b}{A_1 \sqrt{2gb}}$$

$$R_f = \frac{4\sqrt{b}}{\pi d^2 \sqrt{2g}}$$

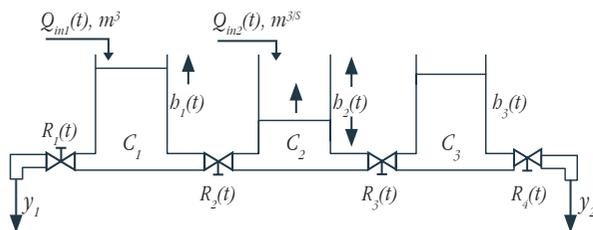
(3)

Si la resistencia de fluido es una válvula,  $f$  en la siguiente ecuación será la fracción de apertura que debe estar entre 0 y 1, 00% y 100%, tomando el valor de 1 que indica que la válvula está totalmente abierta, entonces la anterior ecuación se convierte en (Vega, 2006):

$$R_f = \frac{4\sqrt{b}}{\pi d^2 \sqrt{2gf}}$$

(4)

**Figura 3.** Tanques en serie-sistema interactivo

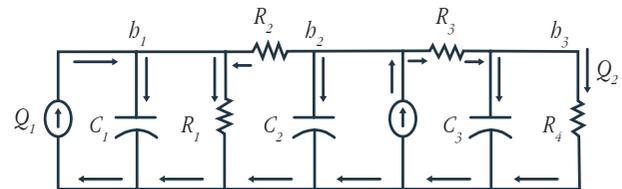


Fuente: Autor

Se representa un sistema interactivo que se compone por tres tanques en serie. Se conoce como un sistema interactivo, porque hay interrelación entre las variables (Fig. 3). El nivel del primer tanque afecta al del segundo; y el nivel de éste afecta a los otros; lo mismo es verdad para los niveles del segundo y tercer tanques (Smith, Corripio, 1991). Tres tanques en serie significan que todos están interconectados uno a continuación del otro por medio de un sistema de distribución (tubos), es decir, se encuentran acoplados. Este tipo de sistemas hidráulicos, tiene sus aplicaciones en la vida real como: procesos químicos, termodinámica, etc.

Un modelo equivalente de la Fig. 3 es el siguiente.

**Figura 4.** Circuito hidráulico-modelo equivalente de tres tanques-sistema lineal



Fuente: Autor

La Fig. 4 se utilizará para obtener las ecuaciones del sistema lineal (linealización y diagonalización).

Las ecuaciones diferenciales para este sistema hidráulico haciendo un análisis basado en el principio de conservación de la masa del flujo (Ogata, 1987, p. 188) para la Fig. 3 se tiene que el caudal de entrada es igual al caudal almacenado en el tanque, representado por la capacitancia de fluido por la razón de cambio de la altura ( $C \frac{dh}{dt}$ ), más el caudal de salida a través de la válvula, el cual se obtiene mediante la ecuación (1). Realizando este análisis para los 3 tanques se obtienen las ecuaciones del modelo no lineal.

En este sistema no lineal el diámetro de todas las válvulas será igual, para simplificar los cálculos, así mismo los términos comunes se representarán por una constante  $k$  y la fracción de apertura será igual a 1, es decir las válvulas están abiertas al 100%.

$$\begin{aligned}
 Q_{mi1} &= C_1 \frac{db_1}{dt} + \sqrt{2g} \sqrt{b_1} \frac{\pi}{4} d^2 - \sqrt{b_2 - b_1} \frac{\pi}{4} d^2 \\
 Q_{mi2} &= C_2 \frac{db_2}{dt} + \sqrt{2g} \sqrt{b_2 - b_1} \frac{\pi}{4} d^2 + \sqrt{2g} \sqrt{b_3} \frac{\pi}{4} d^2 \\
 \sqrt{2g} \sqrt{b_2 - b_1} \frac{\pi}{4} d^2 &= C_3 \frac{db_3}{dt} + \sqrt{2g} \sqrt{b_3} \frac{\pi}{4} d^2
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Para las salidas

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \sqrt{2g} \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{b_1}; y_2 = \sqrt{2g} \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{b_3} \\
 Parak &= \sqrt{2g} \frac{\pi}{4} d^2 \\
 Q_{mi1} &= C_1 \frac{db_1}{dt} + k \sqrt{b_1} - k \sqrt{b_2 - b_1} \\
 Q_{mi2} &= C_2 \frac{db_2}{dt} + k \sqrt{b_2 - b_1} + k \sqrt{b_2 - b_3} \\
 k \sqrt{b_2 - b_3} &= C_3 \frac{db_3}{dt} + k \sqrt{b_3}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Al despejar  $\frac{db_1}{dt}, \frac{db_2}{dt}, \frac{db_3}{dt}$  se obtiene las ecuaciones de estado o ecuaciones dinámicas del sistema:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1}{C_1} (Q_{mi1} - k \sqrt{b_1} - k \sqrt{b_2 - b_1}) \\
 b_2 &= \frac{1}{C_2} (Q_{mi2} + k \sqrt{b_2 - b_1} - k \sqrt{b_2 - b_3}) \\
 b_3 &= \frac{1}{C_3} (k \sqrt{b_2 - b_3} - k \sqrt{b_3}) \\
 y_1 &= k \sqrt{b_1}; y_2 = k \sqrt{b_3}
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Donde  $b_1, b_2$  y  $b_3$  son las variables de estado, que muestran cómo evoluciona el estado del sistema, es decir, serán variables que contienen la información necesaria para predecir el comportamiento del sistema a través del tiempo.  $Q_{mi1}$  y  $Q_{mi2}$  son las entradas o llegada de caudal al sistema, con estas referencias se podrá controlar el nivel

de fluido en un tanque, o en dos tanques o en todos los tres;  $y_1$  y  $y_2$  son las salidas del sistema; es decir la cantidad de caudal en litros por segundo del fluido que sale del sistema.

Y la representación matricial es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{C_2} \begin{bmatrix} -k \sqrt{b_1} - k \sqrt{b_2 - b_1} \\ k \sqrt{b_2 - b_1} - k \sqrt{b_2 - b_3} \\ k \sqrt{b_2 - b_3} - k \sqrt{b_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{mi1}(t) \\ Q_{mi2}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 y_1 &= k \sqrt{b_1} \\
 y_2 &= k \sqrt{b_3}
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

## Enfoque de sistemas

La tabla 1 resume los aspectos más importantes del enfoque de sistemas y a continuación se describe cada uno de ellos.

## Clasificación

El sistema es causal, ya que existe una relación de causalidad entre las salidas y las entradas del sistema, más explícitamente, las salidas  $y^1$  y  $y^2$  dependen de los valores futuros de las entradas  $Q^1$  y  $Q^2$ . El flujo o caudal de entrada en este sistema se representa por la notación  $Q_{mi1}, Q_{mi2}$ .

Cómo el sistema no lineal tiene dos entradas y dos salidas, se denomina como MIMO (múltiples entradas y múltiples salidas). Las ecuaciones diferenciales ecuación (7) que definen el sistema son no lineales, por lo tanto el sistema es no lineal. Las variables de estado  $b_1, b_2$  y  $b_3$  son función del tiempo. El modelo del sistema se constituye de ecuaciones diferenciales y no de ecuaciones en diferencias, por lo tanto el sistema es de tiempo continuo, las variables de tiempo continuo,  $b_1, b_2$  y  $b_3$  se deno-

minan también analógicas. En función de la evolución de las variables del sistema en el tiempo y en el espacio, el sistema es no estacionario, ya que las variables  $b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$  no son constantes en el tiempo o en el espacio. Según la respuesta del sistema que es el valor de la salida respecto a la variación de la entrada del sistema, el sistema se considera altamente inestable, porque ante una variación muy rápida de la entrada se produce una respuesta no acotada de la salida. El sistema es en lazo abierto porque la salida para ser controlada, no se compara con el valor de la señal de entrada o señales de referencia que este caso son  $Q_{ini1}$  y  $Q_{ini2}$  (Perez, 2003 y Vélez, C.M, 2009).

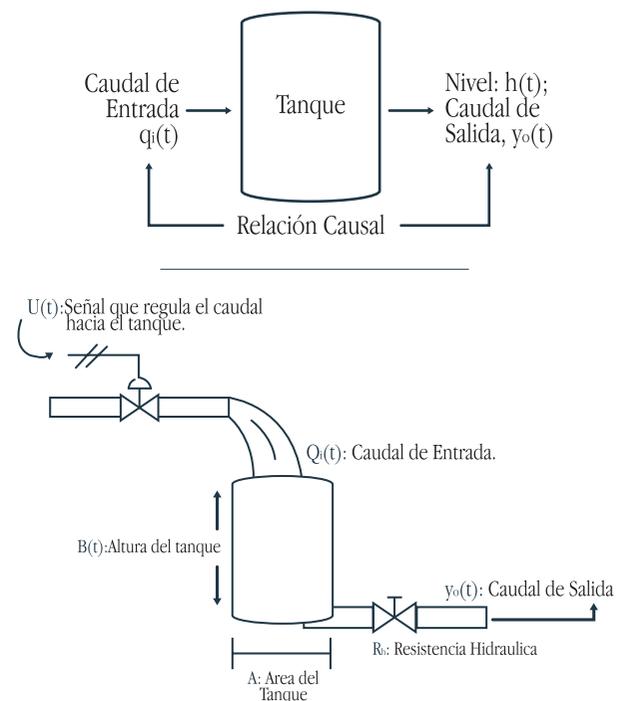
**Tabla 1.** Aspectos más importantes del sistema hidráulico en el marco del enfoque de sistemas

	Modelo
Entradas	$Q_{ini1}, Q_{ini2}$
Salidas	$y_1, y_2$
Perturbaciones	Válvulas, Orificios, fugas Tubos de longitud considerable <ul style="list-style-type: none"> <li>Almacenamiento de fluido (tanques, depósitos)</li> </ul>
Subsistemas	<ul style="list-style-type: none"> <li>Alimentación del sistema</li> <li>Distribución (red de tuberías): tubo o tubos.</li> </ul>
Sistemas análogos	Circuito Fig. 4
Ecuaciones	Ecuaciones (6) y (7)
Alinealidades	Presenta una alinealidad debido a que existe una raíz en las variables dependientes en cada una de las ecuaciones. <ul style="list-style-type: none"> <li>El sistema tiene un modelo matemático.</li> <li>El sistema según su señal es continuo y determinístico.</li> </ul>
Clasificación	<ul style="list-style-type: none"> <li>Según su forma, es estructural (subsistemas e interacciones).</li> <li>Según sus ecuaciones: es dinámico, no lineal, con ecuaciones diferenciales parciales, y con parámetros distribuidos.</li> </ul>

## Perturbaciones

La detección de las fugas se identifica cuando los niveles de los tanques de regulación o almacenamiento tardan mucho en recuperarse. Se debe, primero, localizar y posteriormente detectar las fugas. Ambas actividades se llevan a cabo mediante recorridos por las zonas en que se registran pérdidas de presión; pero esto sólo en los sitios en donde se hallan instalados manómetros, en otro caso, la localización se lleva a cabo mediante el ruido “característico” de una fuga, cuando esto último sucede, la detección es otro proceso todavía más tardado, porque se hacen en algunos puntos por donde debiera ir la tubería, como las zanjas, con el objeto de encontrar indicios de la fuga (González, 2008).

**Figura 5.** Relación causal del sistema hidráulico.



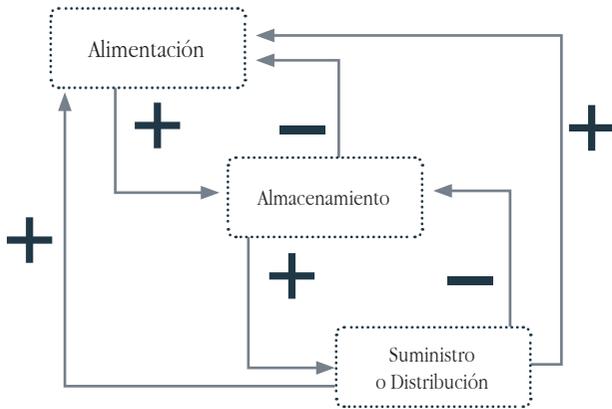
Fuente: Autor.

## Subsistemas

Para llegar al corazón de un problema se requiere identificar todas las causas posibles de algún efecto, y para ello es necesario el empleo de algunas técnicas como la

elaboración de un diagrama causa – efecto, cuyo objetivo fundamental es el identificar y verificar todas las causas posibles de un problema y llegar a la causa o raíz principal del mismo para reducirlo o bien, eliminarlo (González, 2008).

**Figura 6.** Diagrama causal de la relación entre los subsistemas



Fuente: Autor.

### Subsistema de alimentación

Como su nombre lo indica, es el abastecimiento del fluido que opera en el sistema.

### Subsistema de almacenamiento (tanques, depósitos)

La función natural de un tanque hidráulico es contener o almacenar el fluido de un sistema hidráulico. ¿En qué consiste un tanque hidráulico?, es un sistema hidráulico industrial, en donde no hay problemas de espacio y puede considerarse la obtención de un buen diseño, los tanques hidráulicos consisten de cuatro paredes (normalmente de acero), un fondo con desnivel, una tapa plana con una placa para montaje, cuatro patas, líneas de succión, retorno y drenaje; tapón de drenaje, indicador de nivel de aceite; tapón para llenado y respiración; una cubierta de registro, para limpieza y un tabique separador o placa deflectora. Además de funcionar como un contenedor de fluido, un tanque también sirve para enfriar el fluido, permitir asentarse a los contaminantes

y el escape del aire retenido. Cuando el fluido regresa al tanque, una placa deflectora bloquea el fluido de retorno para impedir su llegada directamente a la línea de succión. Así se produce una zona tranquila, la cual permite sedimentarse a las partículas grandes de suciedad, que el aire alcance la superficie del fluido y da oportunidad de que el calor se disipe hacia las paredes del tanque. La desviación del fluido es un aspecto muy importante en la adecuada operación del tanque. Por esta razón, todas las líneas que regresan fluido al tanque deben colocarse por debajo del nivel del fluido y en el lado de la placa deflectora opuesto al de la línea de succión. La mayoría de los sistemas hidráulicos de tamaño pequeño a mediano utilizan los tanques o depósitos como base de montaje para la bomba, motor eléctrico, válvula de alivio, y a menudo otras válvulas de control. Este conjunto se llama, “unidad de bombeo”, “unidad generada de presión”, etc. La tapa del tanque puede ser removida para permitir la limpieza e inspección. Cuando ésta, no es la lateral y constituye la parte superior del tanque, lleva soldadas cuplas para recibir conexión de tuberías de retorno y drenaje. Se colocan guarniciones alrededor de las tuberías que pasan a través de la tapa para eliminar la entrada de aire<sup>1</sup>.

### Subsistema de distribución (Tubería)

El método más común para transportar fluidos de un punto a otro, es impulsarlo a través de un sistema de tuberías. Las tuberías de sección circular son las más frecuentes, ya que esta forma ofrece no sólo mayor resistencia estructural sino también mayor sección transversal para el mismo perímetro exterior que cualquier otra forma. A menos que se indique específicamente, la palabra “tubería” en este estudio se refiere siempre a un conducto cerrado de sección circular y diámetro interior constante. A muy pocos problemas especiales de mecánica de fluidos, como es el caso del flujo en régimen laminar por tuberías, pueden ser resueltos por métodos matemáticos convencionales; todos los demás problemas necesitan métodos de resolución basados en coeficientes determinados experimentalmente. Muchas fórmulas empíricas han sido propuestas como soluciones

1. Hidráulica: Tanques y depósitos, accesorios, circuitos hidráulicos en [www.sapiensman.com/neumatica/](http://www.sapiensman.com/neumatica/). Consultado en marzo de 2016.

a diferentes problemas de flujo de fluidos por tuberías, pero son muy limitadas y pueden aplicarse sólo cuando las condiciones del problema se aproximan a las condiciones de los experimentos de los cuales derivan las fórmulas (Crane, 1989).

La relación que existe entre los subsistemas se detalla en la Fig. 6 y se puede expresar como: A mayor caudal de entrada, mayor volumen o almacenamiento de fluido en los tanques, y a mayor almacenamiento, los caudales de salida son más grandes y por lo tanto hay mayor distribución. A mayor suministro o distribución, disminuye el nivel de los tanques y por lo tanto hay menos almacenamiento en los tanques. A mayor almacenamiento en los tanques, menor debe ser la alimentación que llega a ellos. Mientras más alimentación, caudal de entrada haya, mayor será la distribución del fluido.

Mientras más distribución haya, es necesario tener mayor caudal de entrada.

### Sistemas análogos

Un sistema análogo para el sistema hidráulico de tres tanques es el que se encuentra en la Fig. 4.

Los circuitos hidráulicos son capaces de producir muchas combinaciones diferentes de movimiento y fuerza. Sin embargo, en esencia son lo mismo, independientemente de su aplicación. Tales circuitos están formados por cuatro componentes básicos: un depósito para guardar el fluido hidráulico, una bomba o unas bombas para forzar al fluido a través del circuito, válvulas para controlar la presión del fluido y su flujo, y un actuador o unos actuadores para convertir la energía hidráulica en energía mecánica para hacer el trabajo (Ogata, 1987).

Los elementos de un circuito hidráulico son y están representados por:

- *Resistencia*: la resistencia de un elemento físico (ya sea mecánico, eléctrico, hidráulico o neumático) puede definirse como el cambio en potencial requerido para producir un cambio unitario en la corriente, razón de flujo o velocidad, o bien.

$$\text{Resistencia} = \frac{\text{Cambio en potencial}}{\text{cambio en corriente, razón de flujo o velocidad}}$$

La resistencia de fluido corresponde a tubos, orificios, válvulas o cualquier otro dispositivo restrictor de flujo y se determina a partir de la relación entre: la presión diferencial ( $N/m^2$ ) (diferencia de presión entre la corriente arriba y la corriente abajo en un dispositivo restrictor de flujo) o altura diferencial ( $m$ ) y la razón de flujo o caudal ( $m^3/s$ ), es decir:

$$\text{Resistencia } R = \frac{\text{Cambio en potencial}}{\text{Cambio en presión diferencial}} = \frac{N / m^2}{m^3 / s}$$

O bien

$$\text{Resistencia } R = \frac{\text{Cambio en altura diferencial}}{\text{Cambio en razón de flujo}} = \frac{m}{m^3 / s} = \frac{s}{m^2}$$

La resistencia de flujo en los ductos depende del tipo de fluido en cuanto a la viscosidad y del tipo de material de las tuberías, puesto que la rugosidad en las paredes del ducto se opone al paso del fluido.

- *Capacitancia*: la capacitancia de un elemento físico puede definirse como el cambio en la cantidad de material o distancia requerido para producir un cambio unitario en potencial o.

$$\text{Capacitancia} = \frac{\text{Cambio en cantidad de material o distancia}}{\text{Cambio en potencial}}$$

En un sistema de tanque lleno de líquido, la cantidad de material puede ser el volumen del líquido ( $m^3$ ), y el potencial puede ser, ya sea la presión ( $N/m^2$ ) o la altura ( $m$ ). Si aplicamos la definición general precedente de la capacitancia al sistema del tanque lleno de líquido, el resultado es:

$$\text{Capacitancia } C = \frac{\text{Cambio en cantidad de líquido}}{\text{Cambio en presión}} = \frac{m^3}{N / m^2}$$

O bien

$$\text{Capacitancia } C = \frac{\text{Cambio en cantidad de líquido}}{\text{Cambio en la altura}} = \frac{m^3}{m} \text{om}^2$$

Al obtener modelos matemáticos del sistema, tanque lleno de líquido, es conveniente escoger la altura como una medida de potencial, puesto que con ésta selección, la capacitancia del tanque lleno de líquido coincide con el

área de la sección transversal del tanque. Si ésta es constante, la capacitancia debe ser constante para cualquier altura. Debe notarse que la capacitancia ( $m^2$ ) es diferente de la capacidad ( $m^3$ ) (Ogata, 1987).

**Tabla 2.** sistemas análogos

Sistemas Análogos	
Sistema Tres Tanques No Lineal	Circuito Hidráulico Lineal
$Q_{ini}$ = entrada de fluido	Ⓛ Fuente independiente de corriente, flujo de corriente.
$C$ = Capacitancia del tanque	Ⓜ Capacitancia
$R$ = resistencia de fluido	Ⓜ Resistencia
$h$ = altura de nivel	$v$ = voltaje

La anterior tabla muestra la relación que existen entre la Fig. 3 y la Fig. 4.

### Ventajas y desventajas de los sistemas hidráulicos

Hay ciertas ventajas y desventajas más notables, en el uso de los sistemas hidráulicos que en otros sistemas. Algunas de las ventajas se enlistan a continuación:

- El fluido hidráulico actúa como lubricante, además de transportar el calor generado en el sistema hasta un intercambiador de calor conveniente.
- Los actuadores hidráulicos de tamaño comparativamente pequeño pueden desarrollar grandes fuerzas o pares.
- Los actuadores hidráulicos tienen una mayor velocidad de respuesta con arranques, paros e inversiones de la velocidad.
- Los actuadores hidráulicos pueden operarse sin dañarse en condiciones continuas, intermitentes, inversoras y de frenado.
- La disponibilidad de actuadores lineales y rotatorios ofrece flexibilidades en el diseño.
- Por el escaso escurrimiento en los actuadores hidráulicos, la caída de velocidad es pequeña cuando se aplica carga.

Por otra parte, existen varias desventajas que tienden a limitar su uso, estas son:

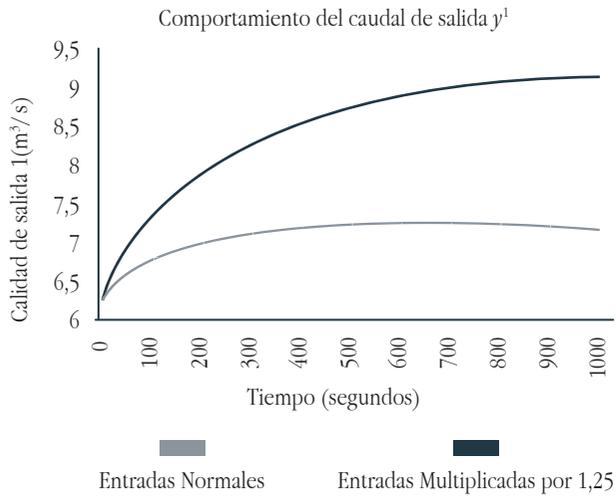
- La potencia hidráulica no está tan fácilmente disponible comparada con la potencia eléctrica.
- El costo de un sistema hidráulico puede ser mayor que el de un sistema eléctrico semejante, que realice una función equivalente.
- Existen riesgos de fuego y explosión, a menos que se usen fluidos a prueba de incendio.
- En vista de que es difícil mantener un sistema hidráulico libre de escurrimientos, el sistema tiende a ser sucio.
- El aceite contaminado puede causar fallas en el funcionamiento correcto de un sistema.
- Como resultado de la no linealidad y otras características complejas involucradas, el diseño de sistemas hidráulicos complicados es muy comprometedor.
- Los circuitos hidráulicos generalmente tienen características de amortiguamiento limitadas. Si un circuito hidráulico no está diseñado correctamente, pueden ocurrir o desaparecer algunos fenómenos de inestabilidad, dependiendo de las condiciones de operación (Ogata, 1987).

La linealidad es una propiedad que pueden tener o no las funciones; realmente se trata de dos propiedades agrupadas bajo un mismo nombre. Dada una función  $y=f(x)$ , éstas propiedades son:

- Proporcionalidad: es igual calcular la función en un argumento amplificado por un factor que calcularla sobre el argumento y luego amplificar el resultado por ese mismo factor:  $f(x) = f(x)$  En términos prácticos, esto significa que en los modelos lineales al duplicar las entradas se duplican las salidas.
- Superposición: es igual calcular la función en la suma de dos argumentos que calcularla por separado en cada uno de los argumentos y sumar los resultados.  $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ . En términos prácticos, esto significa que en los modelos lineales de varias entradas, las salidas pueden conocerse calculando por separado el efecto de cada entrada y sumando los resultados (Duarte, 2006).

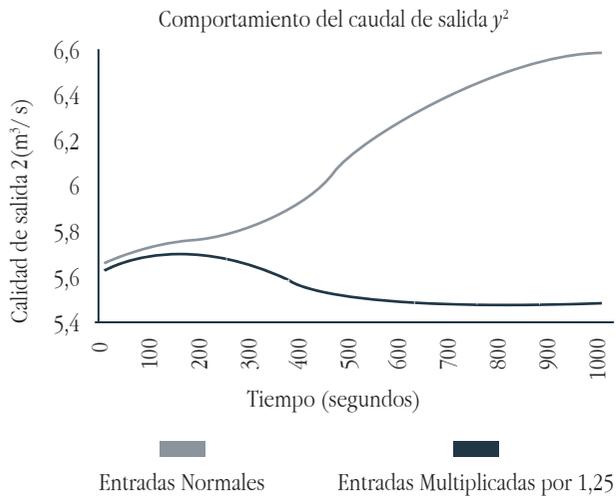
El principio de superposición no se cumple, ya que al correr el modelo en Simulink/MatLab, con las entradas originales, y luego estas mismas pero multiplicadas por 1.25, se observa que las salidas no son proporcionales a las entradas (Fig. 7 y Fig.8).

**Figura 7.** Pérdida de superposición y proporcionalidad de la salida



Fuente: Autor.

**Figura 8.** Pérdida de superposición y proporcionalidad de la salida 2

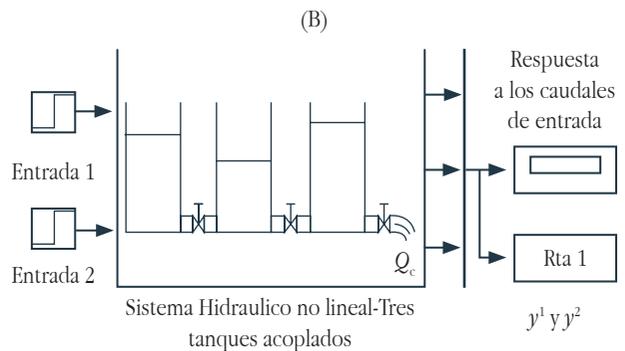
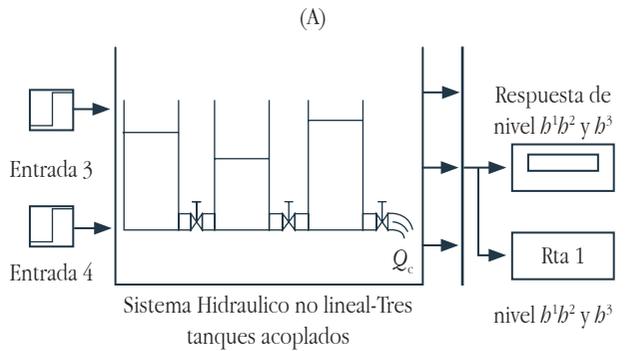


Fuente: Autor.

## Modelo y Simulación

La siguiente simulación se realizó con la ecuación de estado o ecuaciones dinámicas del sistema, ecuaciones (6), (7) y (8) a través de Simulink/MatLab.

**Figura 9.** Modelo de la máscara del sistema hidráulico que fue incorporado en Simulink/MatLab. a) Comportamiento de las alturas de nivel b) Comportamiento a los caudales de entrada Modelo y Simulación



Fuente: Autor.

Los valores de los parámetros que se utilizaron en la simulación, se muestran en la siguiente tabla. También se utilizaron las siguientes suposiciones: el diámetro de todos los tubos sería igual a dos pulgadas ( $d=2''$ ) y todas las válvulas estarían totalmente abiertas con  $f=1$ , entonces se expresa de la forma  $\kappa = \frac{\sqrt{2(9.81)\pi(0.0508)^2}}{4} = 8.977 \times 10^{-3}$ . Si se cambian los materiales de los ductos, los valores de las resistencias de fluido aumentarían, puesto que, los materiales rugosos incrementan las pérdidas ocasionando que los caudales disminuyan.

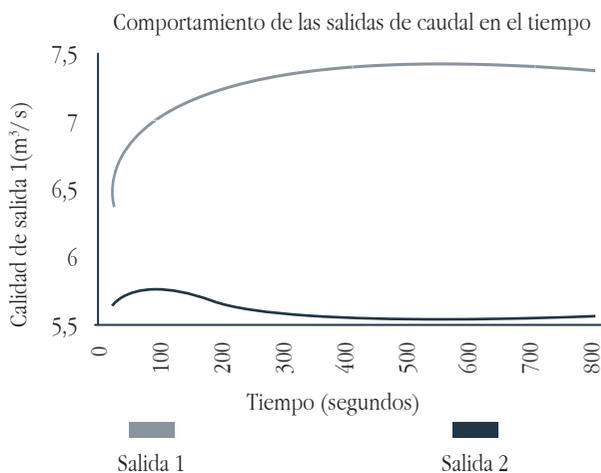
En la máscara se puede modificar éstos parámetros iniciales que se han dado por defecto, y se puede documentar el sistema, de tal forma que los usuarios de la misma, tengan un entorno amigable y claro a la hora de trabajarla.

**Tabla 3.** Valores de los parámetros del modelo para las simulaciones sistemas análogos

Parámetro	Descripción	Valor
$Q_{ini1}$	Primera entrada de fluido	5li/s=0.005 m <sup>3</sup> /s
$Q_{ini2}$	Segunda entrada de fluido	8li/s=0.008 m <sup>3</sup> /s
$K$	Constante cuando $d=2''$	0.008977
$C_1$	Capacitancia del fluido en el tanque 1	2m <sup>2</sup>
$C_2$	Capacitancia del fluido en el tanque 2	1m <sup>2</sup>
$C_3$	Capacitancia del fluido en el tanque 3	3m <sup>2</sup>
$b_1(0)$	Altura del nivel en el tanque 1. Nivel de flujo en el tanque 1 en el instante $t=0$	0.5mts
$b_2(0)$	Altura del nivel en el tanque 2. Nivel de flujo en el tanque 2 en el instante $t=0$	1mts
$b_3(0)$	Altura del nivel en el tanque 3. Nivel de flujo en el tanque 3 en el instante $t=0$	0.4mts
$f$	Fracción de apertura en la válvula 1, 2, 3 y 4, 0, $\leq, f, \leq, 1$	1
$R_1$	Resistencia de fluido en la válvula 1	184.87
$R_2$	Resistencia de fluido en la válvula 2	60.88
$R_3$	Resistencia de fluido en la válvula 3	137.63
$R_4$	Resistencia de fluido en la válvula 4	137.63

La salida  $y_1$  tiene un valor de estabilización de 7.44 Li/s y alcanza este valor alrededor de los 800 s. La salida  $y_2$  tiene un caudal máximo de 5.53 Li/s en 54 segundos y tiene un valor de estabilización de 5.53 Li/s alrededor de los 600 segundos (Fig. 10).

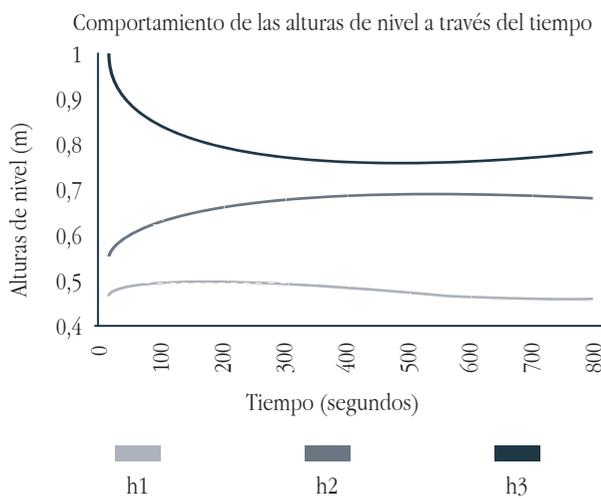
**Figura 10.** Comportamiento de las salidas de caudal del sistema hidráulico a través del tiempo



Fuente: Autor.

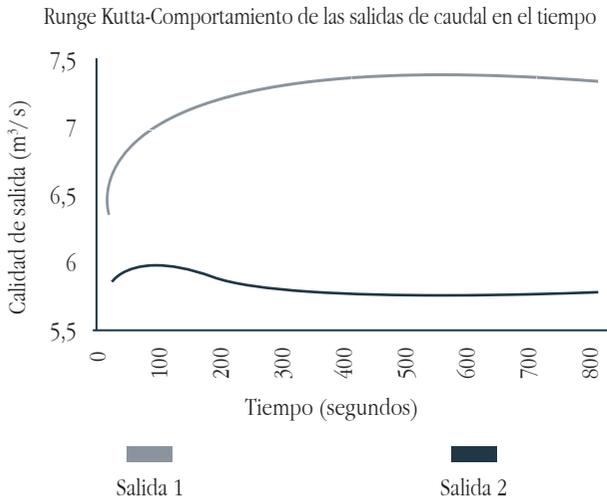
La respuesta de la altura de nivel de fluido en el tanque 1,  $b_1(t)$  a través del tiempo se estabiliza en 0.68 m, la respuesta de la altura de nivel de fluido en el tanque 2,  $b_2(t)$  a través del tiempo se estabiliza en 0.76 m y la respuesta de la altura de nivel de fluido en el tanque 3,  $b_3(t)$  a través del tiempo se estabiliza en 0.38 m. El rango de tiempo de estabilización de los tres niveles está entre 500 y 800 segundos (Fig. 11).

**Figura 11.** Comportamiento de las alturas de nivel del sistema hidráulico a través del tiempo



Fuente: Autor.

**Figura 12.** Respuesta del sistema de ecuaciones no lineales por el método de Runge Kutta implementado en MatLab



Fuente: Autor.

También se realizó la simulación con el método numérico de Runge Kutta de orden 4, que calcula en cada paso el valor adecuado del incremento a fin de cumplir con las especificaciones de precisión requeridas (Mathews, 2000), al comparar la solución obtenida con la respuesta en el modelo en Simulink se encuentra exactamente igual (Anexo 1).

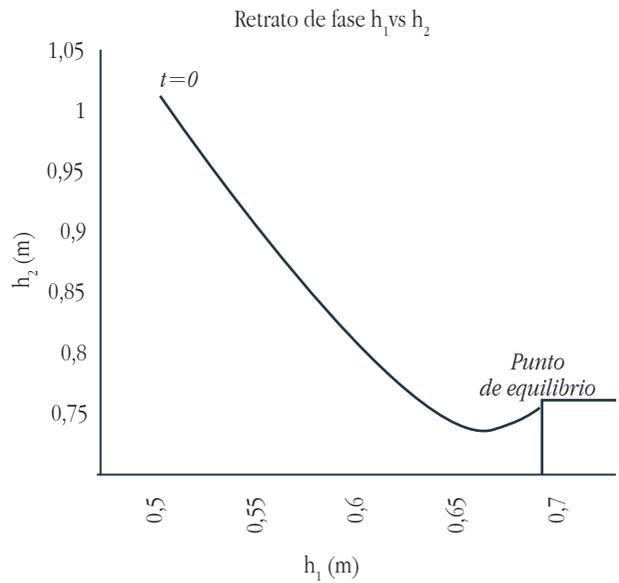
### Retrato de fase

En la Fig. 13 en el eje horizontal se encuentra la variable de estado  $h_1(t)$  mientras que en el eje vertical se encuentra la variable de estado  $h_2(t)$ . En  $t=0$  la curva empieza en los valores iniciales de  $h_1(t)$  y  $h_2(t)$  (0.5, 1). La curva termina en el punto de equilibrio para  $h_1(t)$  y  $h_2(t)$  (0.68, 0.761).

Al igual que la Fig. 13, la Fig. 14 muestra las relaciones entre las variables de estado  $h_1$  vs  $h_3$ .

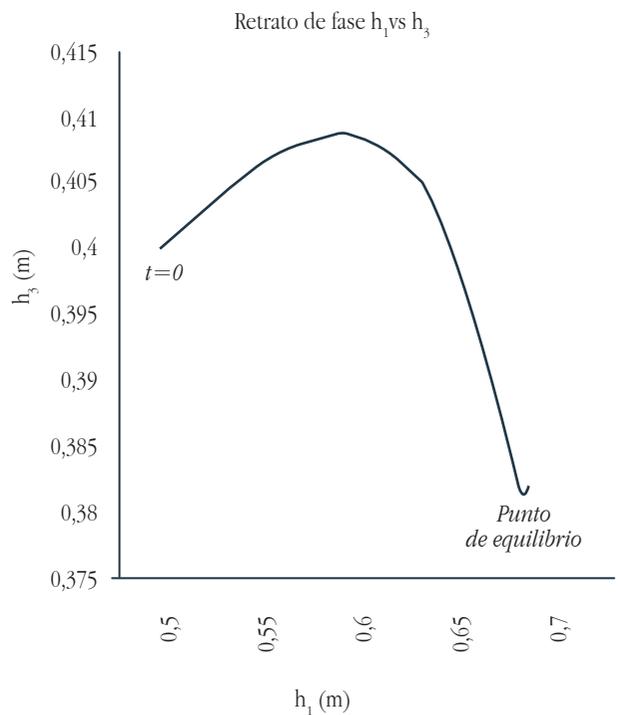
En la Fig. 15 se muestra la relación que hay entre las salidas  $y_1$  vs  $y_2$ , claramente se ve que la curva termina en los puntos de estabilización para las salidas (7.44 Li/s, 5.54 Li/s), estos puntos son correspondientes a los obtenidos al modelo del sistema no lineal realizado en Simulink/ MatLab y al método numérico Runge Kutta (Fig.10 y Fig.11), (Anexo 1).

**Figura 13.** Retrato de fase  $h_1$  vs  $h_2$



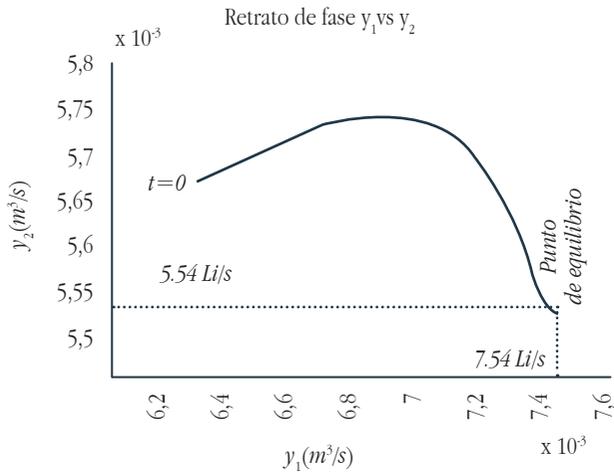
Fuente: Autor.

**Figura 14.** Retrato de fase  $h_1$  vs  $h_3$



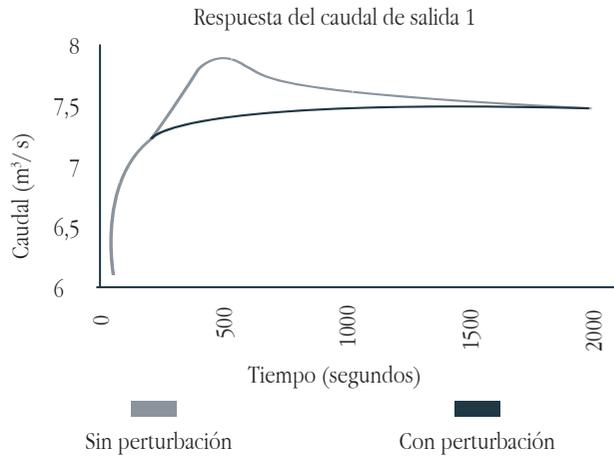
Fuente: Autor.

**Figura 15.** Retrato de fase  $y_1$  vs  $y_2$



Fuente: Autor.

**Figura 17.** Respuesta del caudal de salida 1 con y sin perturbación

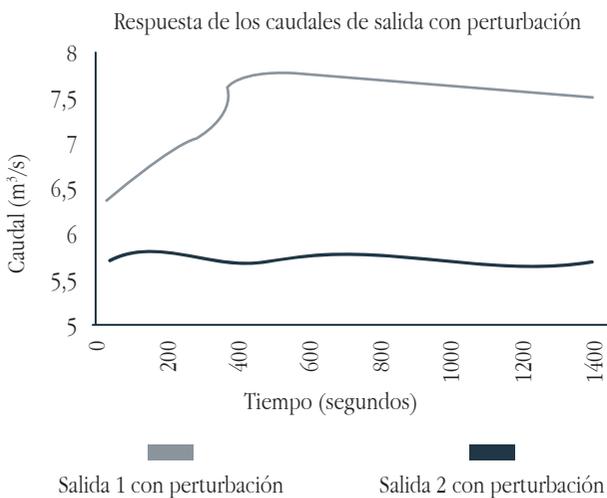


Fuente: Autor.

## Modelo con perturbación

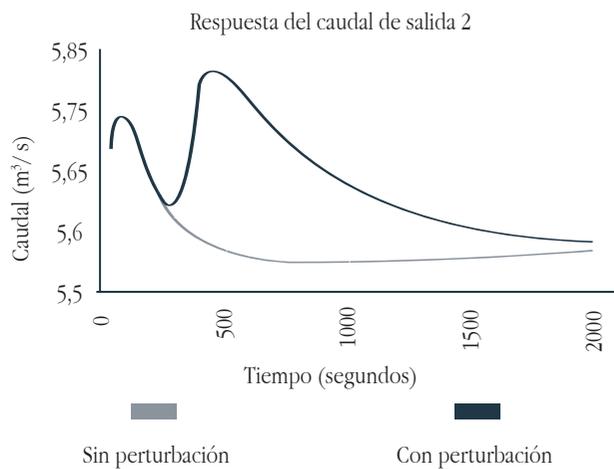
La perturbación de la entrada está entre 200 y 350 segundos y consiste en un cambio en el caudal de entrada  $Q_{ini2}$ , de 8  $Li/s$  a 11  $Li/s$ ; en la gráfica de respuesta se observa la desviación producida por el pulso de la perturbación originándose la mayor desviación alrededor de los 400 segundos de 7,4  $Li/s$  a 7,82  $Li/s$  en la salida 1 y en el mismo tiempo para la salida 2 varía de 5,55  $Li/s$  a 5,82  $Li/s$ .

**Figura 16.** Simulación del sistema hidráulico con perturbación



Fuente: Autor.

**Figura 18.** Respuesta del caudal de salida 2 con y sin perturbación



Fuente: Autor.

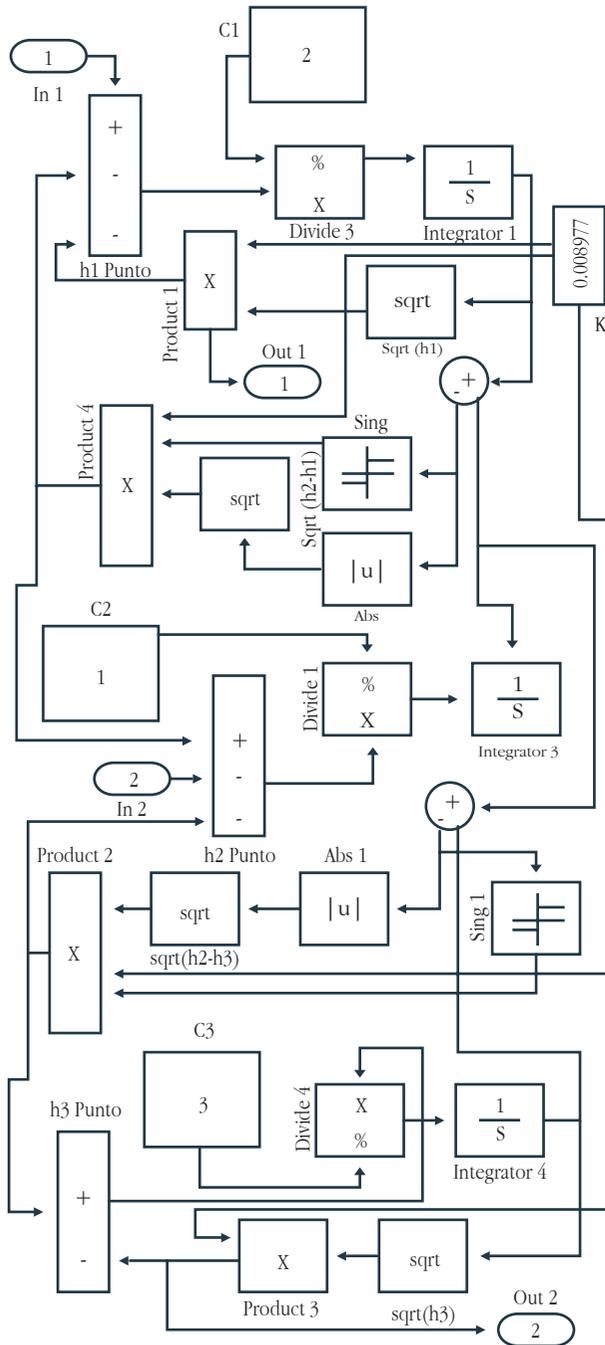
## Linealización

La determinación del valor de los puntos de equilibrio se realiza a partir de las ecuaciones que definen las condiciones en las que los caudales de entrada y salida para cualquier tanque son iguales con lo que se logra el equilibrio en la altura de nivel del tanque en consideración. El sistema resultante se obtiene igualando las ecuaciones (7) a cero.

El procedimiento de solución resulta en  $b_1=0.68868 m$ ,  $b^2=0.76337 m$  y  $b_3=0.38168 m$ , la determinación de estos valores se realiza partir de la función de linealización que se implementó en MatLab utilizando el método de Newton Raphson (Mathews, 2000) (Ver anexo 2).

Se deben reemplazar los anteriores puntos de operación en la matriz del sistema lineal, el cual se obtiene al derivar con respecto a cada una de las variables de estado y con respecto a cada una de las entradas para obtener las matrices A y B de la ecuación de espacio de estado.

Figura. 19. Archivo de linealización



Fuente: Autor.

El modelo linealizado se obtiene utilizando la siguiente relación:

$$\Delta \dot{b} = \frac{\partial \dot{b}}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial \dot{b}}{\partial b} \Delta Q \tag{9}$$

Donde:

$$\frac{\partial \dot{b}}{\partial b} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial b_1} & \frac{\partial f_1}{\partial b_2} & \frac{\partial f_1}{\partial b_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial b_1} & \frac{\partial f_2}{\partial b_2} & \frac{\partial f_2}{\partial b_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial b_1} & \frac{\partial f_3}{\partial b_2} & \frac{\partial f_3}{\partial b_3} \end{bmatrix} y \frac{\partial \dot{b}}{\partial Q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial Q_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial Q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial Q_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial Q_1} & \frac{\partial f_3}{\partial Q_2} \end{bmatrix}$$

La ecuación (10) representa las matrices A y B del sistema lineal donde aún no se han reemplazado los puntos de operación y la ecuación (11) representa las mismas matrices reemplazando los puntos.

$$\begin{bmatrix} \dot{b}_1 \\ \dot{b}_2 \\ \dot{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K}{2C_1} \left( \frac{1}{\sqrt{b_1}} + \frac{1}{\sqrt{b_2 - b_1}} \right) & \frac{k}{2C_1} \left( \frac{1}{\sqrt{b_2 - b_1}} \right) & 0 \\ \frac{k}{2C_2} \left( \frac{1}{\sqrt{b_2 - b_1}} \right) & \frac{k}{2C_2} \left( \frac{1}{\sqrt{b_2 - b_1}} + \frac{1}{\sqrt{b_2 - b_3}} \right) & \frac{k}{2C_2} \left( \frac{1}{\sqrt{b_2 - b_3}} \right) \\ 0 & \frac{k}{2C_3} \left( \frac{1}{\sqrt{b_2 - b_3}} \right) & \frac{k}{2C_3} \left( \frac{1}{\sqrt{b_2 - b_3}} + \frac{1}{\sqrt{b_3}} \right) \end{bmatrix} \Delta b + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta Q \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{b}_1 \\ \dot{b}_2 \\ \dot{b}_3 \end{bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 6.347697 & 6.347697 & 0 \\ 6.347697 & -12.142326 & 5.794628 \\ 0 & 1.93154 & -4.297190 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{mi1}(t) \\ Q_{mi2}(t) \end{bmatrix} \tag{11}$$

Las matrices C y D de la ecuación de salida son:

$$y = Cx + Du$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{mi1}(t) \\ Q_{mi2}(t) \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{184.87} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{137.63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{mi1}(t) \\ Q_{mi2}(t) \end{bmatrix} \tag{13}$$

Con el archivo del sistema no lineal en Simulink (Fig. 19) y utilizando la función *linmod* de MATLAB, y con la siguiente instrucción:

$$[A,B,C,D]=$$

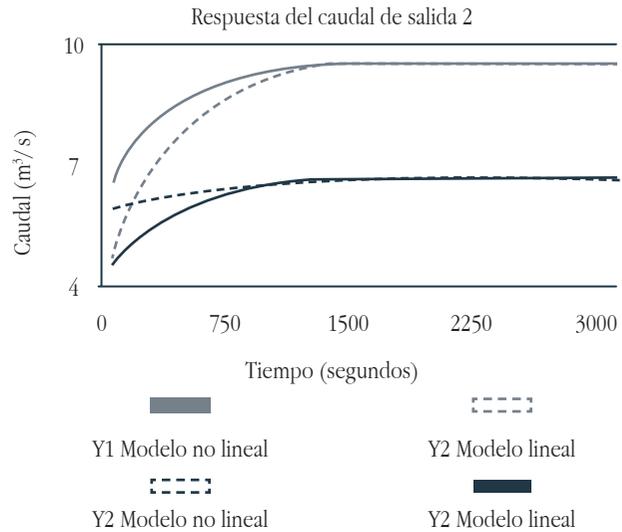
*linmod ('linealizacion', [0.68868,0.76337,0.38168],[0.005,0.008])* se obtuvo un modelo linealizado alrededor del punto de operación  $[0.68868,0.76337,0.38168]$ , que equivalee a la ecuación 11 y 13.

### Comparación entre el modelo lineal y el no lineal

Se define la función de transferencia de un sistema continuo o discreto como la relación en el dominio de la frecuencia compleja entre salida y entrada con condiciones iniciales nulas (Duarte, 2006). Para los dos modelos se tienen las mismas entradas, los valores de las condiciones iniciales no cambian en ninguno de los dos modelos. Las respuestas en el sistema lineal alcanzan el punto de equilibrio alrededor de 2000 segundos, sin

embargo se observa que en el modelo no lineal la razón de crecimiento es mayor y por consiguiente alcanza el equilibrio en un tiempo menor (Fig. 21).

Figura 20. Modelo lineal y modelo no lineal en Simulink

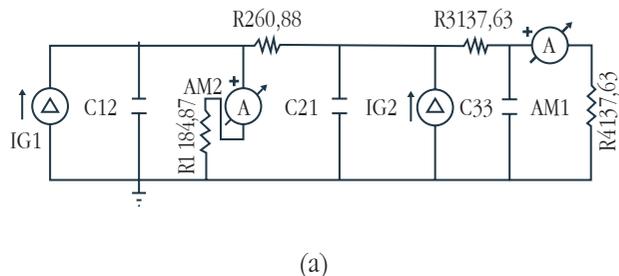


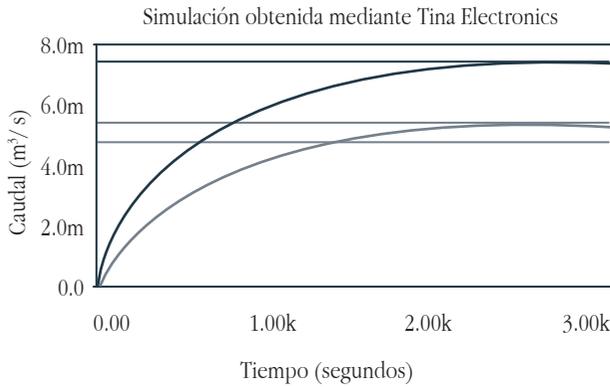
Fuente: Autor.

La Fig. 20 representa la relación entre el modelo no lineal y su aproximación lineal, el delta que se adjunta al modelo lineal, es el punto de operación en la entrada, el cuál debe ser restado, y los puntos de operación de  $b_1$  y  $b_3$  que deben ser sumados a la salida.

El modelo lineal tiene una analogía (Fig. 4) como se mencionó anteriormente, al realizar la simulación en un software de electrónica (TINA DesignSoft v8.0), se obtuvieron los caudales de salida que en la analogía corresponden a las corrientes en las resistencias  $R_1$  y  $R_4$  (Fig. 22).

Figura 21. Simulación en Tina a) circuito equivalente b) Transiente de corriente

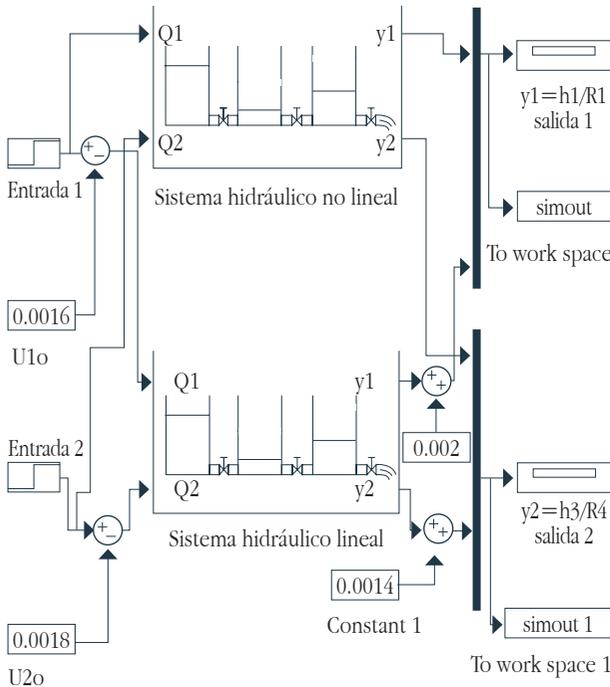




(b)

Fuente: Autor.

Figura 22. Simulación en Tina a) circuito equivalente b) Transiente de corriente



Fuente: Autor.

### Funciones de transferencia

MatLab entrega las funciones de transferencia con la función ss2tf. Las ecuaciones (11) y (13) entregan cuatro funciones de transferencia ya que se tiene dos entradas y dos salidas y se enuncian a continuación:

$$G_{11} = \frac{1.717 \times 10^{-5}}{s^3 + 2.27 \times 10^{-2} s^2 + 1.25 \times 10^{-4} s + 1.73 \times 10^{-7}}$$

$$G_{12} = \frac{1.403 \times 10^{-5}}{s^3 + 2.27 \times 10^{-2} s^2 + 1.25 \times 10^{-4} s + 1.73 \times 10^{-7}}$$

$$G_{21} = \frac{7.0 \times 10^{-7}}{s^3 + 2.27 \times 10^{-2} s^2 + 1.25 \times 10^{-4} s + 1.73 \times 10^{-7}}$$

$$G_{22} = \frac{9.0 \times 10^{-7}}{s^3 + 2.27 \times 10^{-2} s^2 + 1.25 \times 10^{-4} s + 1.73 \times 10^{-7}}$$

Los polos del sistema son:

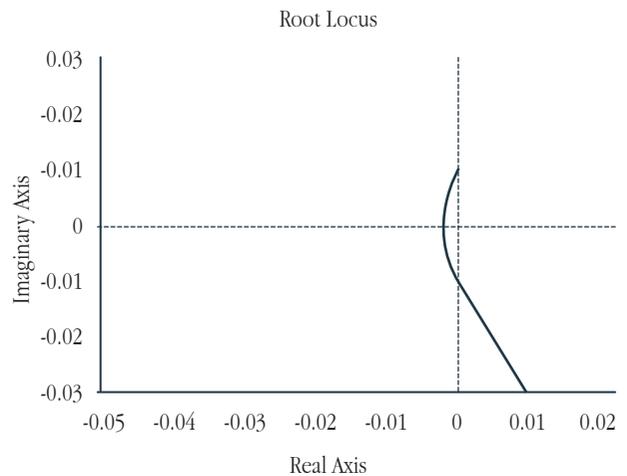
- 0.015382047079519
- 0.005259500246109
- 0.002145666323372

Los ceros de las cuatro funciones están en el infinito.

### Comportamiento del lugar de las raíces

El sistema tiene tres polos que se ubican en el semiplano izquierdo, por lo tanto el comportamiento del sistema es estable. En la Fig. 23. se puede observar que la máxima ganancia que puede tener el sistema es  $2.65 \times 10^{-6}$  para mantener la estabilidad del sistema.

Figura 23. El lugar geométrico de las raíces



System SYS	Overshoot%:102
Gain: 272e-006	Frequency (rad/sec): 0.0112
Pole: 5.75e-005+0.0112i	

Fuente: Autor.

## Análisis temporal

Como los polos son reales el sistema tiene un comportamiento sobreamortiguado (Fig.21), donde los polos dominantes son  $s_1 = -0.0021$  y  $s_2 = -0.0052$ . Las constantes del error escalón en estado estable son  $k_{p1} = 0.5283$  y  $k_{p2} = 0.4716$ , esto significa que la salida  $y_1$  se desvía 7.1% de su valor nominal, a diferencia de  $y_2$  que tiene una variación de 8.52%.

## Análisis de sensibilidad

La sensibilidad de un sistema se define a partir del análisis frecuencial y temporal y sirve para predecir la variación de las señales de salida  $y_1$  y  $y_2$  ocasionadas por un cambio en los parámetros del sistema o por algunas perturbaciones. Éste tipo de análisis sirve para establecer si es robusto o no dentro de sus máximos valores de funcionamiento. Para el análisis de sensibilidad los parámetros que se van a tener en cuenta son  $R_1$  y  $R_4$  ya que son los elementos que se afectan mayormente por la no linealidad del sistema y además porque influyen directamente sobre las salidas  $y_1$  y  $y_2$ ; las capacitancias de fluido no tienen variación en ninguna condición de funcionamiento, porque dependen del área transversal de los tanques, y éstas no se afectan con ningún otro parámetro ni con cualquier señal de perturbación.

**Tabla 4.** Parámetros para el análisis de sensibilidad del sistema lineal e identificación de sus intervalos alores de los parámetros del modelo para las simulaciones istemas análogos

Parámetro	Valor	Intervalo
$R_1$	184.87	[168.2 – 205.4 ]
$R_4$	137.63	[127 – 152.5 ]

Los intervalos de las resistencias de fluido se calcularon con una variación del 20% tomando el rango de operación con una desviación en los niveles que afectan las salidas, encontrándose que el caudal de mayor variación es  $y_1$  con 14%; considerando otras condiciones de funcionamiento más críticas entonces se toma un rango de variabilidad de máximo 20%,  $y_1$  se estabiliza en  $7.44 \times 10^{-3}$ , por lo tanto se utiliza el siguiente cálculo para determinar el valor de estabilización del nuevo valor de  $y$  cuando  $R_1$  varía entre 168.2 y 205.4.

**Tabla 5.** Cálculo del valor de la salida ( $y$ ) menos su nuevo valor para el parámetro  $R_1$

$y$	$y^* = h_1/R_1 \times 10^{-3}$	$y - y_1^* \times 10^{-3}$
0.00744	$y_1^* = h_1/R_1 = 0.68868/168.2 = 4.09441$	3.34559
0.00744	$y_2^* = h_1/R_1 = 0.68868/172.8 = 3.98541$	3.45459
0.00744	$y_3^* = h_1/R_1 = 0.68868/177.5 = 3.87988$	3.56012
0.00744	$y_4^* = h_1/R_1 = 0.68868/182.2 = 3.77980$	3.6602
0.00744	$y_5^* = h_1/R_1 = 0.68868/186.8 = 3.68672$	3.75328
0.00744	$y_6^* = h_1/R_1 = 0.68868/191.5 = 3.59624$	3.84376
0.00744	$y_7^* = h_1/R_1 = 0.68868/196.1 = 3.51188$	3.92812
0.00744	$y_8^* = h_1/R_1 = 0.68868/200.8 = 3.42968$	4.01032
0.00744	$y_9^* = h_1/R_1 = 0.68868/205.5 = 3.35124$	4.08876

**Tabla 6.** Identificación del error para el parámetro  $R_1$

Parámetro	Valores	Error $\times 10^{-3}$
$R_1$	168.2	3.34559
	172.8	3.45459
	177.5	3.56012
	182.2	3.6602
	186.8	3.75328
	191.5	3.84376
	196.1	3.92812
	200.8	4.01032
	205.5	4.08876

**Tabla 7.** Cálculo del error medio cuadrático para  $y_1$

$y - y_1^* \times 10^{-3}$	$(y - y_1^*)^2 \times 10^{-5}$
3.34559	1.119297245
3.45459	1.193419207
3.56012	1.267445441
3.6602	1.339706404
3.75328	1.408711076
3.84376	1.477449094

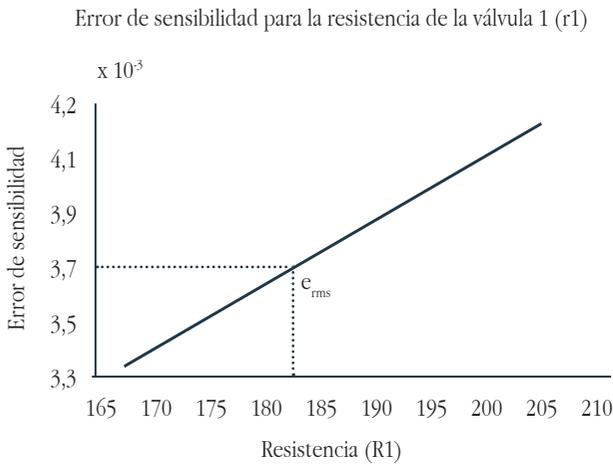
$y-y_i^* \times 10^{-3}$	$(y-y_i^*)^2 \times 10^{-5}$
3.92812	1.543012673
4.01032	1.60826665
4.08876	1.671795834
$\Sigma(y-y_i^*)^2=1.2629 \times 10^{-4}$	

$$e_{rms} = \sqrt{\frac{\Sigma(y-y_i^*)^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{1.2629 \times 10^{-4}}{9}} = 0.0037$$

(14)

Figura 24. El error medio cuadrático para  $y_1$  es  $(3.7 \times 10^{-3})$



Fuente: Autor.

$y_2$  se estabiliza en  $5.53 \times 10^{-3}$ , por lo tanto se utiliza el siguiente cálculo para determinar el valor de estabilización del nuevo valor de  $y$  cuando  $R_4$  varía entre 127.0 y 152.5.

Tabla 8. Cálculo del valor de la salida y menos su nuevo valor para el parámetro  $R_4$

$y$	$y^* = h_y/R_4 \times 10^{-3}$	$y-y_i^* \times 10^{-3}$
0.00553	$y_1^* = h_y/R_4 = 0.38168/127.0 = 3.00535$	2.52465
0.00553	$y_2^* = h_y/R_4 = 0.38168/130.2 = 2.93149$	2.59851
0.00553	$y_3^* = h_y/R_4 = 0.38168/133.5 = 2.85902$	2.67098

$y$	$y^* = h_y/R_4 \times 10^{-3}$	$y-y_i^* \times 10^{-3}$
0.00553	$y_4^* = h_y/R_4 = 0.38168/136.8 = 2.79005$	2.73995
0.00553	$y_5^* = h_y/R_4 = 0.38168/140.1 = 2.72433$	2.80567
0.00553	$y_6^* = h_y/R_4 = 0.38168/143.4 = 2.66164$	2.86836
0.00553	$y_7^* = h_y/R_4 = 0.38168/146.7 = 2.60177$	2.92823
0.00553	$y_8^* = h_y/R_4 = 0.38168/150.1 = 2.54283$	2.98717
0.00553	$y_9^* = h_y/R_4 = 0.38168/152.5 = 2.50281$	3.02719

Tabla 9. Identificación del error para el parámetro  $R_4$

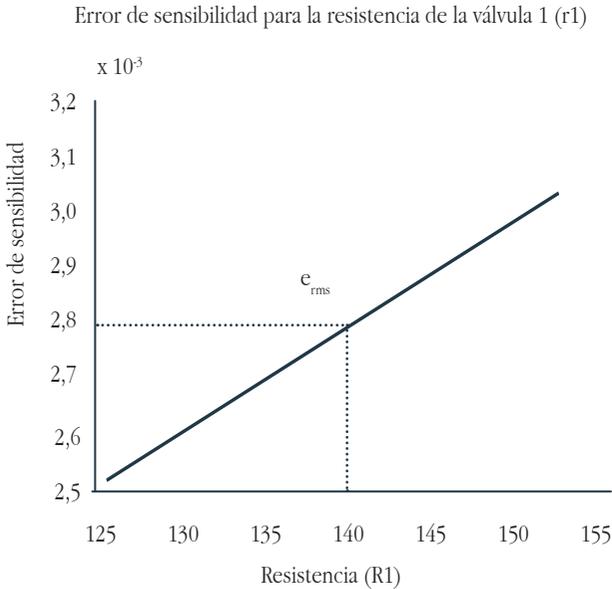
Parámetro	Valores	Error $\times 10^{-3}$
$R_4$	127.0	2.52465
	130.2	2.59851
	133.5	2.67098
	136.8	2.73995
	140.1	2.80567
	143.4	2.86836
	146.7	2.92823
	150.1	2.98717
	152.5	3.02719

Tabla 10. Cálculo del error medio cuadrático para  $Y_2$

$y-y_i^* i=1..9$	$(y-y_i^*)^2 \times 10^{-6}$
0.00252465	6.3739
0.00259851	6.7523
0.00267098	7.1341e
0.00273995	7.5073
0.00280567	7.8718
0.00286836	8.2275
0.00292823	8.5745
0.00298717	8.9232
0.00302719	9.1639
$\Sigma(y-y_i^*)^2 = 7.0529 \times 10^{-5}$	

$$e_{rms} = \sqrt{\frac{\sum (y - y_i^*)^2}{r!(n-r)!}} = \sqrt{\frac{7.0529 \times 10^{-5}}{9}} = 0.0028 \tag{15}$$

**Figura 25.** Error medio cuadrático para  $y_2$  ( $2.8 \times 10^{-3}$ ).



Fuente: Autor.

El error medio cuadrático para la desviación de  $R_1$  es ( $3.7 \times 10^{-3}$ ) (Fig. 24), por lo tanto se espera un intervalo de variación para  $y_1$  entre [6.96 - 7.92] cuando la resistencia de fluido que representa a la válvula uno tiene una variación del 20%, debido a la no linealidad de este elemento, de igual forma el error para  $R_4$  es ( $2.8 \times 10^{-3}$ ) (Fig.25), por lo que el intervalo para  $y_2$  es [5.2 - 5.9]. Es importante notar que para este sistema hay independencia entre  $y_1$  y la variación de  $R_4$ ; igualmente las variaciones de  $R_1$  no afectan la salida  $y_2$ .

### Transformación lineal a la forma canónica de jordan

La forma canónica del sistema se obtiene a partir de la ecuación de estado mediante el uso de la función canon de MatLab, adquiriéndose el modelo diagonalizado de la ecuación (14) que es equivalente al sistema lineal.

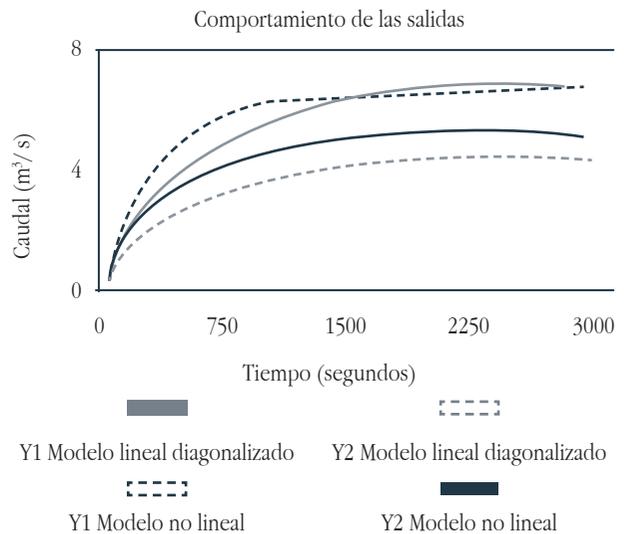
$$b^* \begin{bmatrix} -0.0311 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0063 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0021 \end{bmatrix} b^* + \begin{bmatrix} 0.0206 & -0.0504 \\ 0.0279 & 0.0156 \\ 0.0257 & 0.0276 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{mi1}(t) \\ Q_{mi2}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0322 & 0.0399 & 0.0362 \\ 0.0098 & -0.0494 & 0.0458 \end{bmatrix} b^*$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.0411 & -0.0504 & 0.0140 \\ 0.0558 & 0.0156 & -0.0771 \\ 0.0513 & 0.0276 & 0.0725 \end{bmatrix} \tag{16}$$

En la Fig. 26. se contrastan los modelos no lineal y diagonalizado, como era de esperarse sus comportamientos son similares a los de la Fig. 21.

**Figura 26.** Comparación de los caudales de salida de los modelos lineal diagonalizado y no lineal



Fuente: Autor.

## Modelo y simulación

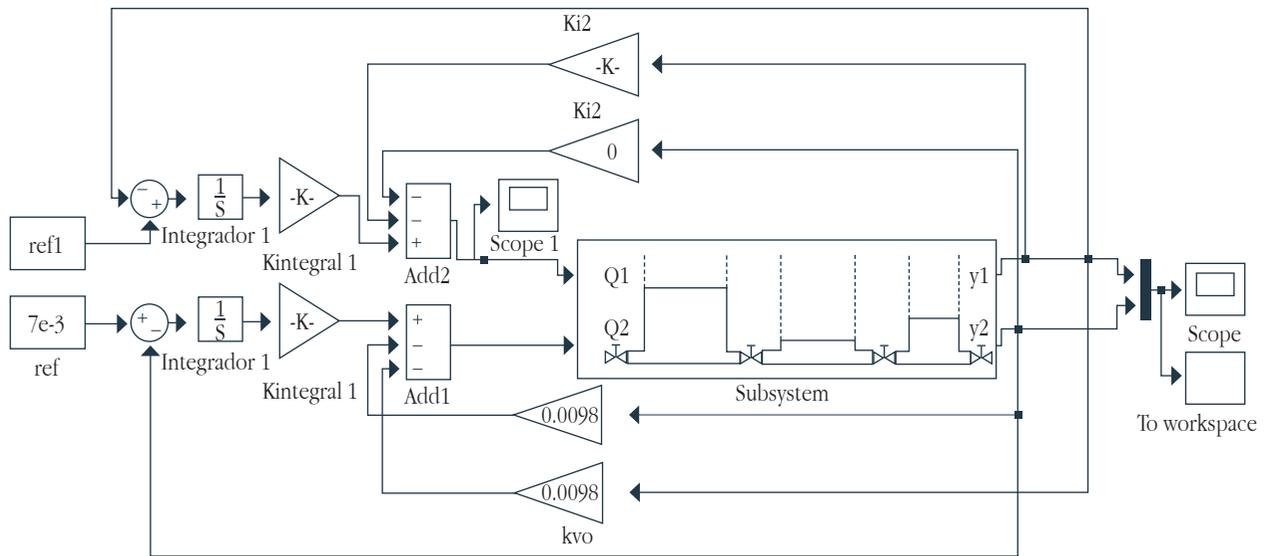
### Parámetros de diseño

El sistema de control a diseñar debe mejorar la respuesta transitoria disminuyendo el tiempo de estabilización y corregir el error de estado estable, sin embargo dadas las condiciones normales de funcionamiento del sistema, las constantes de tiempo del sistema son de gran valor, por

lo que impide que el nivel correspondiente al punto de control de la salida  $y_2$  se alcance en tiempos muy cortos, puesto que dicho nivel se incrementa únicamente a partir del caudal proveniente del tanque 2 circulando por la válvula representada por  $R_3$ .

Al realizar el diseño del control por realimentación del estado, se obtienen los posibles valores de las constantes de realimentación y al realizar las corridas de las simulaciones se obtienen las respuestas, de las cuales se elige la de mejor desempeño (Fig. 28).

Figura 27. Estado del sistema controlado por realimentación del estado 1



Fuente: Autor.

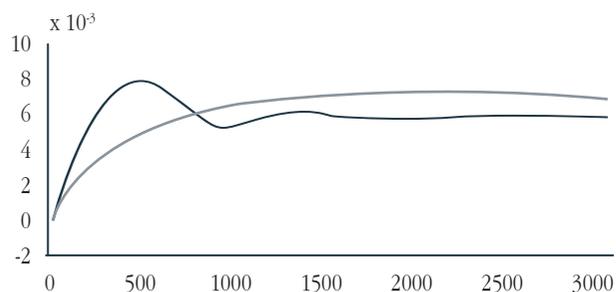
Se uso la función place de MatLab, A se obtuvo previamente, el siguiente vector de polos que produjo la mejor respuesta;

$$p = 0.002900 + 0.00422i - 0.002900 - 0.00422i - 0.0166$$

El resultado arrojado por MatLab para la matriz de realimentación es:

$$K = \begin{bmatrix} -0.006895 & 0.006347 & -0.0 \\ 0.00634769 & -0.010638 & 0.016126 \end{bmatrix}$$

Figura 27. Estado del sistema controlado por realimentación del estado 1



Fuente: Autor.

## Conclusiones

Los sistemas hidráulicos tienen componentes no lineales debido a la variación existente en las resistencias de fluido con los cambios en la altura de nivel, por lo tanto se debe ser precavido con los signos en el diseño, para que a la hora de linealizar el sistema no se desestabilice, ya que en algún momento del trabajo se pensó que el sistema no se podía linealizar por esta razón.

Las ecuaciones diferenciales no lineales que modelan el sistema, tienen condiciones que restringen su uso debido

a la dirección del fluido a través de las válvulas, es importante tener presente esta restricción a fin de que el modelo sea válido para todas las condiciones de funcionamiento.

El modelo lineal obtenido es válido para controlar el sistema en o cerca al punto de equilibrio y con el sistema implementado se encuentra que es posible mejorar la respuesta disminuyendo el tiempo de estabilización y mejorando el error de estado estable.

El análisis de sensibilidad realizado, permite conocer las desviaciones producidas en el modelo lineal, al aproximar las resistencias de fluido a sus valores promedio en la región de operación, obtenidos en el proceso de linealización.

Las simulaciones realizadas a partir de la solución de las ecuaciones diferenciales y mediante Simulink son equivalentes con lo que se verifica que la elección del método es adecuada en cuanto a que este modifica el incremento para satisfacer los requerimientos de precisión.

Los resultados de simulación del sistema no lineal obtenidos con el algoritmo de Runge Kutta son iguales a los conseguidos en Simulink.

Con el control por realimentación del estado diseñado, se cumplieron los requerimientos de respuesta en estado estacionario, sin embargo es necesario realizar el diseño de otro tipo de compensador a fin de ver la posibilidad de mejorar el tiempo de estabilización. Si no se logra disminuir este tiempo, habría la necesidad de implementar el control sobre las válvulas que suministran el caudal de entrada con el propósito de aumentar estos caudales y de esta forma lograr un mejor desempeño del control diseñado.

## Referencias

[1] Kuo, B, "Sistemas de control automático," Ed. Prentice Hall, México (1996).

[2] Smith, C., Corripio A. (1991). Control automático de procesos, teoría y práctica. Limusa, México.

[3] Giles, Ranald V. (1999). Mecánica de los fluidos e Hidráulica, MacGrawHill. Madrid.

[4] Crane, (1989). Flujo de fluidos en válvulas, accesorios y tuberías. McGrawHill, México.

[5] Ogata, K. (1998). Ingeniería de control moderna. Pearson Educación, Prentice-Hall, México.

[6] Ogata, K. (1987). Dinámica de sistemas. Prentice-Hall Hispanoamericana, México.

[7] Vega, H. (2006). Modelamiento de sistemas térmicos e hidráulicos. Especialización en aviónica. Notas de clase. Universidad de San Buenaventura, Bogotá.

[8] Vega, H. (2006). Teoría de control. Especialización en aviónica. Notas de clase. Universidad de San Buenaventura, Bogotá.

[9] Pérez, J. (2003). Análisis dinámico de sistemas. 2º Ing. De Telecomunicación. Notas de clase. Universidad de Oviedo, España.

[10] Vélez, C.M. (Versión 1.1.00 - de 22 de julio de 2009). Introducción a los sistemas dinámicos. Notas de clase. Universidad Eafit. Medellín.

[11] González, F., Val, R., Rocha, J. (Octubre de 2008). Diagnóstico del sistema de agua potable de ciudad universitaria de la universidad nacional autónoma de México. Artículo. Instituto de Ingeniería, UNAM. Circuito Escolar, Ciudad Universitaria. Delegación Coyoacan, 04510 México, D.F.

[12] Duarte, O.G. (2006). Análisis de sistemas dinámicos lineales. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

[13] Mathews, J. y Fink, K. (2000). Metodos numéricos con MatLab. Prentice Hall, España.

## Anexo 1

**Tabla 11.** Programas que se utilizaron para la realización del artículo

Nombre del programa	Descripción
mascara_salidas.mdl	Éste programa simula la respuesta $y_1$ y $y_2$ a los caudales de entrada.
mascara_niveles.mdl	Éste programa simula la respuesta de las alturas de nivel $b_1$ y $b_2$ y $b_2$
RungeKutta.m	Éste programa realiza el método numérico de Runge Kutta para solucionar las ecuaciones del sistema no lineal.

Nombre del programa	Descripción
retrato_fases.mdl	Éste programa simula las trayectorias desde los valores iniciales de las variables de estado hasta sus puntos de equilibrio.
perturbación.mdl	Éste programa simula la respuesta de los caudales de salida con una señal de perturbación.
linealización.mdl	Éste programa es utilizado con la función linmod de MatLab.
comparación.mdl	Éste programa simula la comparación de un modelo no lineal y su aproximación lineal.
control_estado.mdl	Éste programa simula el estado del sistema controlado por realimentación del estado con las diferentes opciones de k.

## Anexo 1

### Programa de linealización por el método de Newton Raphson

#### %programa para hallar la solución de las ecuaciones de linealización

```
clear
k=sqrt(19.62)*0.0508^2*pi/4;
q1=5e-3;q2=8e-3;
tol=1e-2;delta=[1;1];
```

```
h1=0.689;h2=0.76359;
while abs(delta)>tol
if h1>h2
f1=q1/k-sqrt(h1)-sqrt(h1-h2);
f2=q2/k-sqrt(h1-h2)+sqrt(h2/2);
df1dh1=-1/(2*sqrt(h1))-
1/(2*sqrt(abs(h1-h2)));
df1dh2=1/(2*sqrt(abs(h1-h2)));
df2dh1=-1/(2*sqrt(abs(h1-h2)));
df2dh2=1/(2*sqrt(abs(h1-h2)))-
1/(4*sqrt(h2/2));
else
f1=q1/k-sqrt(h1)+sqrt(h2-h1);
f2=q2/k-sqrt(h2-h1)-sqrt(h2/2);
df1dh1=-1/(2*sqrt(h1))+1/
(2*sqrt(h2-
h1));
df1dh2=-1/(2*sqrt(h2-h1));
df2dh1=1/(2*sqrt(h2-h1));
df2dh2=-1/(2*sqrt(h2-h1))-
1/(4*sqrt(h2/2));
end
df=[df1dh1,df1dh2;df2dh1,d
f2dh2];
f=-[f1;f2];
delta=inv(df)*f;
h1=h1+delta(1,1);
h2=h2+delta(2,1);
end
h3=h2/2;
fprintf('\nEl punto de equili-
brio es:\nh1=%1.5f\nh2=%1.5f\
nh3=%1.5f\n',h1,h2,h3)
```

---

## Los Autores



---

### **Olga Lucía Roa Bohórquez**

Magíster en Sistemas y Computación. Universidad de los Andes. Ingeniero de sistemas con énfasis en software, Universidad Antonio Nariño, miembro del semillero de Investigación en Innovación, Creatividad y Emprendimiento INSPIRA. Docente de la Facultad de Ingeniería Universidad Católica de Colombia e-mail: [oroa@ucatolica.edu.co](mailto:oroa@ucatolica.edu.co)



---

### **Gloria Amparo Contreras Gelves**

Magíster en Educación. Instituto Tecnológico de Monterrey, Ingeniera de Sistemas con énfasis en Software, Universidad Antonio Nariño, Editora de la revista INGENIUM, Facultad de Ingeniería, Universidad de San Buenaventura, Bogotá, miembro del Grupo de Investigación Solsytec, docente Facultad de Ingeniería Universidad de San Buenaventura, Bogotá. e-mail: [acontreras@usbog.edu.co](mailto:acontreras@usbog.edu.co)



---

### **Laura Victoria Medina Sánchez**

Magíster en Matemáticas Aplicadas. Universidad EAFI, Ingeniera de Sistemas, Especialista en Pedagogía y Docencia Universitaria e Ingeniera de Sistemas, Universidad San Buenaventura, miembro del Grupo de Investigación Solsytec, docente Facultad de Ingeniería Universidad de San Buenaventura, Bogotá. e-mail: [lmedina@usbog.edu.co](mailto:lmedina@usbog.edu.co)



---

### **Hector M.Vega**

Magíster en Ingeniería, Matemática y Computación, Univ. de la Rioja, Profesor Facultad de Ingeniería de la Univ. San Buenaventura y Universidad Piloto, Bogotá email: [hvega@usbog.edu.co](mailto:hvega@usbog.edu.co)