CAPITAL ASSET PRICING MODEL -ROBERT MERTON-: TEORÍA Y EVIDENCIA EMPÍRICA PARA COLOMBIA 2001-2007[1]

CAPITAL ASSET PRICING MODEL-ROBERT MERTON-: THEORY AND EMPIRICAL EVIDENCE FOR 2001-2007 COLOMBIA

Rafael Sarmiento Lotero Ph. D.[2]
José Rodrigo Vélez Molano Msc.

RESUMEN

En los años recientes se ha observado un creciente interés por el mercado financiero en Colombia, el constante incremento en sus tasas de retorno hace que cada vez más personas destinen más recursos en este tipo de inversión versus otras alternativas como la especulación de tierras o finca raíz.

A pesar de este aumento en el volumen de negociación que ha sufrido el mercado de valores colombiano todavía se considera a éste un mercado poco profundo y por tal hecho esta sujeto a imperfecciones que generan asimetrías en la información que maneja los agentes que participan en él.

Una consecuencia de estas asimetrías es que introduce muchas perturbaciones a los precios de los activos financieros lo que lleva a malos pronósticos de los retornos utilizando modelos de análisis fundamental. De aquí que en la práctica sea más popular el análisis técnico, el cual tiene poco o ningún fundamento estadístico.

ABSTRACT

Recent years have seen a growing interest in the financial market in Colombia, the steady increase in their rate of return makes more and more people place more resources in this type of investment versus alternatives such as speculation in land or real estate.

Despite this increase in volume of trading that the market has suffered Colombian stock is still considered him a little deeper and by that act is subject to imperfections that create asymmetries in the information that drives those involved in it.

One consequence of these asymmetries is that it introduces a lot of disturbances the prices of financial assets which leads to bad forecasts of returns using models of fundamental analysis.

Hence, in practice is the most popular technical analysis, which has little or no basis Statistical. For this reason this document is based on the need to highlight the importance of the

1 Trabajo de investigación teórica efectuado por los autores para publicar en Cuadernos Latinoamericanos de Administración. www.unbosque.edu.co Entregado 03/18/2008 Aprobado 15/05/2008.

2 Rafael Sarmiento Lotero. Economista, Magíster Economía Univ. Andes, Magíster economía Univ. Zurich Suiza, Especialista Finanzas Univ. Javeriana, Magíster Economía Univ. Louvaine la Neuve Belgique, Magíster Economía Financiera Univ. Lyon 2 France, Doctor economía Univ. Louvaine Neuve, Belgique, PostDoctor Univ Lyon 2 y Univ. Geneve Suiza. Profesor investigador, Univ Javeriana, Facultad de economía y Magíster Economía., Teoría del Portafolio Univ Javeriana, Prof. de Riesgo y Concesiones Univ. Externado, Prof. Riesgo Univ. Militar, Prof. Riesgo y Portafolios Unv. del Bosque. rsarmientolotero@javeriana.edu.co, rsarmientolotero@gmail.com
Rodrigo Vélez Molano. Economista, Univ. Javeriana, Magíster Economía Univ. Javeriana, Profesor asistente en Economía Univ. Javeriana y Univ. Militar. En Teoría de Portafolios. rodrigovelez84@yahoo.com

Por tal motivo este documento se basa en la necesidad de resaltar la importancia de los modelos clásicos para el mercado financiero tal y como lo es el Capital Asset Pricing Model (CAPM), los cuales permiten determinar el comportamiento de los activos financieros y el uso de la información de una manera mucho más rigurosa.

PALABRAS CLAVE
Mercado financiero, tasas de retorno, imperfecciones, asimetrías, pronósticos de retornos, CAPM.

classic models for the financial market as it is the Capital Asset Pricing Model (CAPM), which allows determining the behavior of financial assets and the use of information in a much more rigorous.

KEY WORDS
Financial markets, Rate of return, imperfections, asymmetries, forecast of returns, Capital Asset Pricing Model / CAPM.

1. INTRODUCCIÓN

En los años recientes se ha observado un creciente interés por el mercado financiero en Colombia, el constante incremento en sus tasa de retorno hace que cada vez más personas destinen más recursos en este tipo de inversión versus otras alternativas como la especulación de tierras o finca raíz.

A pesar de este aumento en el volumen de negociación que ha sufrido el mercado de valores colombiano todavía se considera a éste un mercado poco profundo y por tal hecho esta sujeto a imperfecciones que generan asimetrías en la información que maneja los agentes que participan en él.

Una consecuencia de estas asimetrías es que introduce muchas perturbaciones a los precios de los activos financieros lo que lleva a malos pronósticos de los retornos utilizando modelos de análisis fundamental. De aquí que en la práctica sea más popular el análisis técnico, el cual tiene poco o ningún fundamento estadístico.

Por tal motivo este documento se basa en la necesidad de resaltar la importancia de los modelos clásicos para el mercado financiero tal y como lo es el Capital Asset Pricing Model (CAPM), los cuales permiten determinar el comportamiento de los activos financieros y el uso de la información de una manera mucho más rigurosa.

El documento se divide en cinco secciones. La primera sección contiene la introducción. La segunda sección se presenta el modelo clásico del CAPM. En la tercera sección se presenta el modelo desarrollado por Robert Merton basado en el CAPM y en el cual se utiliza el cálculo estocástico para determinar las demandas por los activos financieros. En la cuarta sección se presentan la evidencia empírica de los modelos para el caso colombiano y en la última sección las conclusiones.

2. CAPITAL ASSET PRICING MODEL[3]

El CAPM se enfoca en la explicación de la prima de riesgo para los activos financieros permitiendo que un inversionista interactúe en un mercado. Sin embargo, el modelo CAPM se basa en la teoría de Harry Markowitz (1952) sobre la disyuntiva de los individuos entre riesgo y retorno.

Así es como se puede tomar como punto de partida la condición de eficiencia[4] que debe cumplir un portafolio que contenga solo activos riesgosos. Esta condición es:

$$\frac{\mu_1 - r_0}{\beta_1} = \frac{\mu_2 - r_0}{\beta_2} = ... = \frac{\mu_n - r_0}{\beta_n} = \mu_Z - r_0 \quad (1)$$

Donde existen n activos riesgosos, r_0 es el retorno sobre un activo libre de riesgo, μ_i es el retorno esperado sobre el activo i con $i=1,2,...n$ y por construcción $\beta i = \sigma_{iZ}/\sigma^2_Z$, con Z como un portafolio eficiente. La expresión (1) indica que

3 Para el desarrollo y explicación de este modelo se tomó como base el libro de Bailey *The Economics of Financial Markets* y el *paper* de Robert Merton (1973) titulado An Analytic Derivation of Efficent Fronteir.

4 Un portafolio que cumpla la condición de eficiencia, es aquel portafolio que para un nivel de retorno esperado produce el mínimo riesgo posible.

pequeños cambios en la composición del portafolio debido a cambios en la participación de un activo i afecta en igual proporción a todos los otros activos del portafolio, de otra manera, si (1) no se cumple es posible obtener un mayor retorno sobre el portafolio sin que esto implique un aumento en el riesgo. Bajo esta condición de eficiencia se puede encontrar el equilibrio de mercado bajo el modelo CAPM, como se muestra a continuación.

Sea el inversionista $j = 1,2,...,m$, el valor de la posición sobre el activo i es z_iB_j[5], donde B_j es el valor total del portafolio del inversionista j y z_i es la ponderación destinada al activo i (bajo la condición $\sum_{i=1}^{n} z_i = 1$), bajo un equilibrio de mercado el valor de mercado del activo i, p_iX_i, debe ser igual a la suma de los valores de las posiciones sobre el activo i de los m inversionistas, z_iB, la definición anterior se puede resumir en la siguiente expresión:

$$p_iX_i = \sum_{j=1}^{m} z_iB_j = z_i \sum_{j=1}^{m} B_j = z_iB \quad \text{para} \quad i = 1,2,....n \qquad (2)$$

Resolviendo de (2) para z_i se obtiene la siguiente condición de equilibrio:

$$z_i = \frac{p_iX_i}{B} \equiv m_i \quad \text{para} \quad i = 1,2,....n \qquad (3)$$

La ecuación (3) implica que el equilibrio de mercado se presenta cuando los precios de los activos se ajustan tal que z_i es igual a la ponderación del activo i en el portafolio de mercado p_iX_i/B.

Este argumento implica que el portafolio construido por los inversionistas debe ser igual al portafolio de mercado -bajo la condición de equilibrio-, es decir, la selección de activos riesgosos realizada por los inversionistas -puede ser a través del método media-varianza de Markowitz- debe dar como resultado un portafolio eficiente en el cual sus ponderaciones sean iguales a las de equilibrio.

Sin embargo, debido a la distinta aversión al riesgo que poseen los agentes y a la posibilidad de negociar un activo a una tasa libre de riesgo, cada portafolio difiere en la posición que se tiene sobre éste activo. Los portafolios óptimos de estas características se encuentran en lo que se denomina la Capital Market Line ó CML. Para encontrar la CML se utiliza el concepto del Cociente de Sharpe el cual establece que todos los portafolios eficientes generan un mismo exceso de retorno sobre unidad de riesgo, es decir:

$$\frac{\mu_z - r_0}{\sigma_z} = \frac{\mu_M - r_0}{\sigma_M} \qquad (4)$$

Donde Z es un portafolio eficiente y M es el portafolio de mercado, al resolver (4) en función del retorno del mercado:

$$\mu_z = r_0 + \frac{\sigma_z}{\sigma_M}\left(\mu_M - r_0\right) \qquad (5)$$

La expresión (5) es la expresión para la CML dado el retorno libre e riesgo.

Reemplazando (5) en (1) se puede mostrar que la siguiente igualdad se cumple:

$$\frac{\mu_i - r_0}{\beta_i} = \mu_M - r_0 \quad \text{para} \quad i = 1,2,....n \qquad (6)$$

Donde $\beta_i = \sigma_{iM} / \sigma^2_M$. La expresión (6) se suele escribir como:

$$\mu_i = r_0 + \beta_i\left(\mu_M - r_0\right) \quad \text{para} \quad i = 1,2,....n \qquad (7)$$

La ecuación (7) es la predicción principal del modelo CAPM y establece que el retorno esperado sobre un activo i es una función lineal de la prima de riesgo, $(\mu_M - r_0)$, con una pendiente igual a βi.

La Security Market Line (SML) también se deriva de (7), en la cual para valores dados de $\mu_M - r_0$ se puede hallar μi versus βi con intercepto r_0.

5 El subíndice j se ha excluido de z ya que bajo el supuesto de expectativas homogéneas la matriz de VARCOV es igual para todos los inversionistas por lo tanto la ponderación sobre el activo i también lo será.

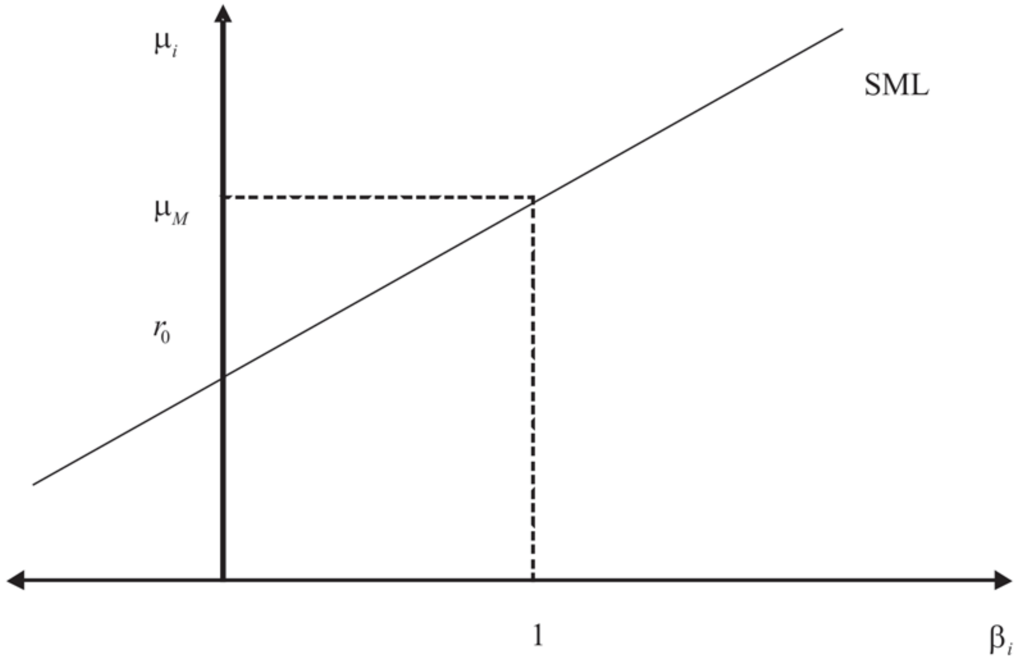

Gráfico 1. Fuente The Economics of Financial Markets (Bailey). Security Market Line.

El Gráfico 1 muestra de que manera el CAPM predice el retorno esperado de un activo, es decir, para cualquier valor de β_i SML indica cual debe ser el retorno esperado para el activo *i*, si (7) se cumple todos los retornos de los activo deben estar sobre la SML y se presenta equilibrio en el mercado financiero. Existen dos posibilidades de desequilibrio:

(a) Sí existe un activo por encima de la SML quiere decir que su retorno observado es mayor que el predicho por el CAPM, esto indica que su precio está subestimado. Por lo tanto, los inversionistas esperan que el precio del activo se ajuste hacia arriba a medida que el mercado vuelve a encontrar el equilibrio y esta tendencia al alza incrementa la demanda por éste activo.

(b) De igual manera sí existe un activo por debajo de la SML su precio esta sobrestimado, el mercado corrige sus expectativas hacia la baja sobre el precio del activo disminuyendo así la demanda por éste activo.

Para realizar una estimación del modelo CAPM se considera a μ_i y μ_M como variables aleatorias, esto permite escribir (7) de la forma:

$$r_i - r_0 = \alpha_0 + \beta_i\left(r_M - r_0\right) + \varepsilon_i \text{ para } i = 1,2,....n \quad (8)$$

Donde ε_i es un término de perturbación estocástica. La expresión (8) se puede estimar por MCO ó Máxima Verosimilitud siempre y cuando se cumpla:

$$\varepsilon_i : iidN\left(0,\sigma_\varepsilon^2\right) \text{ para } i = 1,2,....n \quad (9)$$

$$E\left[\varepsilon_i \mid r_M\right] = E\left[\varepsilon_i\right] = 0 \text{ para } i = 1,2,....n \quad (10)$$

$$Cov\left(\varepsilon_i, r_M\right) = 0 \text{ para } i = 1,2,....n \quad (11)$$

Al cumplirse las condiciones anteriores se garantiza obtener un estimador para βi insesgado, eficiente y consistente.

Sí al estimar (7) $\hat{\alpha}_0 > 0$, se presenta el caso (a) de desequilibrio, sí se presenta que $\hat{\alpha}_0 < 0$ se presenta el caso de desequilibrio (b). Por lo tanto, para no rechazar el modelo CAPM como un modelo que permite determinar un equilibrio en el mercado de capitales se necesita que $\hat{\alpha}_0$ sea estadísticamente igual a cero y que $\hat{\beta i}$ sea significativo para poder estimar SML y establecer una función lineal entre retorno y prima de riesgo, además de las otras bondades que debe poseer un modelo cuando se realiza una estimación econométrica.

Otro aspecto importante de (8) es que permite determinar el tipo de riesgo al que esta expuesto el inversionistas y su participación. El riesgo sistémico es aquel al que todos los inversionistas están expuestos, a este riesgo también se le conoce como riesgo de mercado y no es posible diversificarlo. La otra clase de riesgo es el idiosincrásico el cual esta representado por el término de perturbación ya que recopila todas aquellas variables que el mercado no encierra y es el único riesgo diversificable en el modelo.

2.1. Metodología para hallar el Portafolio Eficiente en el modelo CAPM

Hasta ahora se ha expuesto las condiciones y criterios que deben cumplir los portafolios óptimos a partir del CAPM, a continuación se presentan una de las metodologías para resolver el problema de optimización del portafolio.

Por (5) se puede construir el gráfico de CML y a su vez se puede incluir los portafolios eficientes conformados de solo activos de riesgo además de la tasa libre de riesgo.

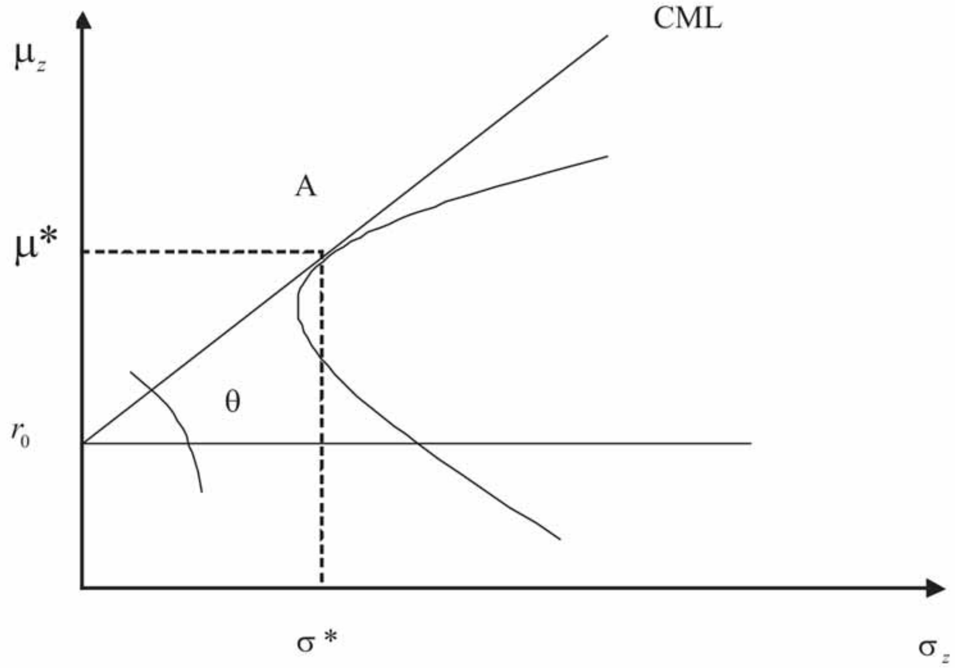

Gráfico 2. Gráfico de la expresión (5), el portafolio óptimo según el CAPM es aquel que está ubicado en el punto A.

En el Gráfico 2 se puede ver que la CML y la tasa libre de riesgo forman un ángulo denotado θ. El objetivo de esta técnica es determinar cual es la pendiente de la CML que es tangente a la frontera eficiente. Por definición la tangente de un ángulo es el cateto opuesto sobre cateto adyacente, dado que el portafolio óptimo debe estar en el punto A, el cateto opuesto es $\mu * - r_0$ y el cateto adyacente es σ^*, por lo que la expresión de esta tangente esta dada por:

$$\tan(\theta) = \frac{\mu * - r_0}{\sigma *} \tag{12}$$

Teniendo presente que

$$\mu * = \sum_{i=1}^{n} w_{ii}\mu \tag{13}$$

$$\sigma * = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}} \tag{14}$$

Se puede reemplaza (13) y (14) en (12) y se procede a maximizar la tangente de θ, de la siguiente forma:

$$\underset{w_i}{Max} \quad \tan(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i - r_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}}} \qquad (15)$$

$$s.a.$$

$$1 = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i$$

Con el fin de conseguir la mayor pendiente posible de la CML se encuentran las condiciones de primer orden de la programación (15) en función de las ponderaciones de cada activo i. Estas condiciones de primer orden no son fáciles (muchas veces no posibles) de despegar en función de las ponderaciones, por lo tanto se utilizan métodos numéricos para encontrar aquellas ponderaciones que satisfagan dichas condiciones.

El modelo CAPM expuesto en esta sección corresponde a Sharpe (1961, 1964) y Lintner (1965, 1969) y sobre el cual hay una extensa literatura tanto reconstruyendo el modelo como enfatizando en sus falencias.

Tal vez la falla más significativa del modelo CAPM es suponer que los inversionistas toman sus decisiones en un único periodo, en otras palabras, que la demanda por cualquier activo riesgoso i solo dependa de su comportamiento como de la correlación que tenga con los otros activos. En la práctica se puede observar que los inversionistas a veces están más preocupados por el estado futuro del mercado financiero que por el mismo presente. Los agentes se generan expectativas sobre los valores futuros de los retornos y con base en ellas programan una estrategia en la cual puedan arbitrar entre dos periodos de tiempo. Esta falla esta representada en el hecho de que el CAPM supone que μ y σ, permanecen constantes, la solución esta en permitir que el conjunto de oportunidades de inversión, μ y σ, cambie en el tiempo, esto implica que a parte de modelar el comportamiento de los precios de activos ahora hay que modelar el comportamiento del retorno esperado y la varianza en el contexto de optimización intertemporal. Así es como Robert Merton desarrolla el CAPM en tiempo continuo con el fin de resolver el problema de a-temporalidad en las decisiones de inversión de los agentes que actúan en el mercado financiero.

3. ARBITRAGE PRICING THEORY (APT)

Este modelo fue desarrollado por Roll Ross (1980) y de manera general se puede ver como un modelo de formación de precios a través del arbitraje en cual la oportunidad de vender caro y comprar barato es posible (ventas en corto), hasta aquí se pueden ver ya dos diferencias con el CAPM, modelo en el que hay ausencia de arbitraje y no se permiten las tenencias negativas.

Los supuestos sobre los que trabaja el APT son los siguientes:

- Es un proceso de generación de retornos.
- No requiere supuestos más allá de la concavidad y la monotonicidad de las funciones de utilidad.
- No se necesita que el portafolio de mercado sea de mínima varianza.
- Existe arbitraje.
- Se permiten las ventas en corto.
- Los mercados son cuasi-completos.
- Existe un activo libre de riesgo o por lo menos se puede construir un portafolio diversificado que tenga cero de sensibilidad con el mercado o con los factores de riesgo adicionales, pero con inversión positiva.

El primer supuesto hace referencia a que el modelo describe el comportamiento de los cambios porcentuales en los precios, es decir, los retornos. El segundo supuesto simplemente indica que el inversionista trabaja bajo la racionalidad económica de que los individuos son adversos al riesgo.

Los supuestos tres, cuatro y cinco se pueden justificar bajo el siguiente argumento. Dado que es un modelo basado en la no ausencia de arbitraje es importante dejar clara la definición. Ausencia de arbitraje implica que ningún agente puede obtener dinero riesgoso sin costo alguno, es decir, nadie puede alcanzar una mayor utilidad sin violar su restricción presupuestaria. Para apoyar esta definición, el modelo de activos contingentes Arrow-Debreu dice que hay ausencia de arbitraje si es posible replicar cualquier retorno dado un conjunto completo de activos A-D tales que, el precio pagado en el mercado por un activo es el mismo que se obtiene si se infiriere el precio desde los retornos replicados del portafolio. De otra manera se podrá vender el activo mas caro y comprar el más barato, en cual la ganancia tendrá un costo y riesgo igual a cero. Así mismo se define como portafolio de arbitraje aquel portafolio que se financia por si mismo. La oportunidad de arbitraje se da cuando el portafolio de arbitraje genere ganancias superiores en sus activos con ponderaciones positivas que alcancen a cubrir sus posiciones de venta corta en los otros activos, en otras palabras tendrá retornos positivos en cualquier estado de la naturaleza.

Sin embargo, el APT se separa del modelo Arrow-Debreu, primero en la medida que reemplaza la estructura de pagos dado un estado de la naturaleza por una en donde los activos solo remuneran si toma algún riesgo, esto significa que se pueden encontrar factores específicos para cada activo que determinen exhaustivamente los retornos. Y segundo, que los precios de los activos no son determinados a través de las preferencias y dotaciones iniciales que conforman la demanda y oferta en un modelo de equilibrio general, sino que son deducidos de los retornos observados de los activos.

Para eliminar el problema de los mercados cuasi-completos, el APT solo necesita que exista un mercado lo suficientemente amplio en acciones con diferentes características y con un mínimo de restricciones de negociación, dada esta estructura de mercado se puede desarrollar el APT de la siguiente manera.

Todos los activos se comportan con respecto al factor común de riesgo[6] de la forma:

$$E\left[r_i\right] = \alpha_i + \beta_i\left(E\left[r_M\right]\right) + \varepsilon_i \qquad (15)$$

Ahora suponga que el riesgo sistémico presente en (15) se puede descomponer en dos factores, por lo anterior la ecuación anterior se puede reescribir así;

$$E\left[r_i\right] = a_i + b_{i1}\widetilde{F}_1 + b_{i2}\widetilde{F}_2 + \varepsilon_i \qquad (16)$$

Donde b_{i1} será la sensibilidad del activo i al factor F_1, b_{i2} será la sensibilidad del activo i al factor $\widetilde{F}_2$ y el riesgo sistémico esta compuesto por $(b_{i1}\widetilde{F}_1 + b_{i2}\widetilde{F}_2)$. ε_i, es el riesgo específico además este error debe ser ruido blanco, los factores no pueden tener correlación con el error y a su vez los errores no están correlacionados entre si, por lo que debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} &E\left[\varepsilon_i\right] = 0 \\ &Cov\left(\widetilde{F}_1, \varepsilon_i\right) = Cov\left(\widetilde{F}_2, \varepsilon_i\right) = 0, \forall i \\ &Cov\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = 0, \forall i \neq j \end{aligned} \qquad (17)$$

De la ecuación anterior se puede inferir que:

- El valor esperado del término de error o del riesgo especifico sea igual a cero, lo que tiene sentido por cuanto se ha hecho el supuesto de información perfecta, es decir, los inversionistas han cubierto todo el riesgo especifico asociado al activo i (no es posible esperar "sorpresas").
- Los factores de riesgo sistémico no pueden estar atados al riesgo específico, ya que el riesgo sistémico no es diversificable, si se llegara a existir alguna relación entre estos dos riesgos se podría presentar dos casos: primero, que no es posible diversificar el riesgo especifico porque estará sujeto a una variable aleatoria con la cual no es posible hacer coberturas y segundo, que al hacer la diversificación del riesgo especifico también se diversifique una parte del riesgo sistémico, incumpliendo un aspecto importante de la teoría la cual dice que no es posible diversificar el riesgo sistémico.
- La última condición de la expresión (17) implica el hecho de que el riesgo específico es particular para activo del mercado financiero.

Teniendo presente lo anterior, se puede construir un portafolio P dados N activos riesgosos en el mercado, con una ponderación x_i sobre el activo i y un vector $x^T = (x_1,\ldots,x_N)$ que representa las ponderaciones transpuestas de los activos en el portafolio, tal que este cumpla con lo siguiente:

1) Cero costo, es decir, que no requiera inversión inicial ya que las posiciones de venta corta sobre un activo se pueden cubrir con otra posición sobre otro activo en el mismo portafolio.

6 El factor común de riesgo para todos los activos es el factor de riesgo del mercado.

$$\sum_i x_i = 0 = x^T \cdot 1 \qquad (18)$$

A diferencia del CAPM en donde (18) debe ser igual a uno.

2) Que beta sea igual a cero para el factor común (índice de mercado) y un beta positivo para sus factores específicos, tal como:

$$\sum_i x_i \beta_i = 0 = x^T \cdot \beta \qquad (19)$$

Como ya se mencionó en el modelo anterior, el coeficiente beta representa la sensibilidad que posee el activo con respecto a su riesgo especifico, por tanto la ecuación anterior representa la sensibilidad del portafolio con respecto al riesgo, siendo la sensibilidad del portafolio la suma ponderada de los diferentes betas existentes con respecto al factor común.

3) Exista una buena diversificación, es decir, que la varianza del portafolio sea cercana a cero:

$$\sum_i x_i \sigma^2_{\varepsilon_i} \cong 0 \qquad (20)$$

Teniendo en cuenta que el término de error representa el riesgo específico asociado a cada activo y este es el único riesgo diversificable, (20) representa el riesgo específico asociado al portafolio, el cual se debe minimizar.

Dadas las tres condiciones anteriores, el portafolio P tiene un costo igual a cero al igual que su varianza, es decir libre de riesgo. Retomando la definición de ausencia de arbitraje, el portafolio P es un portafolio de arbitraje a menos que la siguiente condición se cumpla:

$$\overline{r}_P = 0 = \sum_i x_i \overline{r}_i = x^T \overline{r} \qquad (21)$$

Esta ecuación se conoce como la condición de no arbitraje, por lo tanto sí el retorno medio del portafolio es cero significa que no es posible obtener ganancias mediante una estrategia de comprar barato y vender caro, es decir, las ventas en corto no generan ninguna ganancia.

De las tres condiciones anteriores, el APT establece que existen dos escalares con el fin de determinar la prima de riesgo, tal que:

$$E[r_i] = \lambda_0 + \lambda_1 \beta_i \qquad (22)$$

Donde (22) hace referencia al comportamiento del activo con respecto al factor común.

Ahora se supone que hay un portafolio libre de riesgo r_t con beta igual a cero para los factores de riesgo. Es decir, el retorno esperado de r_t es:

$$\lambda_0 = r_f \qquad (23)$$

Además debe existir un solo portafolio Q que posee un beta igual a 1 con respecto al factor común y cero para otros factores. Para obtener el retorno esperado del portafolio Q es necesario utilizar las expresiones (22) y (23):

$$E[r_Q] = r_f + \lambda_1 \qquad (24)$$

Despejando y suponiendo que el portafolio Q es el mismo portafolio de mercado se tiene que:

$$\lambda_1 = E[r_M] - r_f \qquad (25)$$

Ahora bien, esta expresión es la prima de riesgo, la cual es idéntica a la del CAPM, y al igual que en este modelo la prima de riesgo en el APT no es función del riesgo diversificable.

Retomando la expresión (16), para estimar los betas debe existir la posibilidad de construir *portafolios del factor puro*[7] que sigua los retornos de los factores; los factores se pueden ver como índices de producción, tasas de retorno de los bonos, curva de tasa de retorno, etc. Por lo tanto para cada factor hay un portafolio P1 y P2 puro que cumpla:

$$\begin{array}{ll} b_{P_1} = 1 & b_{P_2} = 1 \\ b_{P_2} = \sigma_{\varepsilon_i P_1} = 0 & b_{P_1} = \sigma_{\varepsilon_i P_2} = 0 \end{array} \qquad (26)$$

El conjunto de condiciones (26) representa los portafolios puros que se forman por cada factor, para este caso en particular hay dos factores. Ahora, reescribiendo la expresión (16), se obtiene:

7 Este tipo de portafolios son aquellos que tienen un coeficiente de sensibilidad igual a uno con respecto a un único factor y cero para los demás.

$$E\left[r_i\right] = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} \qquad (27)$$

Dado que (27) se obtuvo a partir de portafolios puros idénticos al portafolio Q antes construido, es posible utilizar la expresión (23) y (25), para cada uno de los coeficientes, de tal manera que:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= r_f \\ \lambda_1 &= E\left[r_{P_1}\right] - r_f \\ \lambda_2 &= E\left[r_{P_2}\right] - r_f \end{aligned} \qquad (28)$$

Al igual que la expresión (25), en (28) las primas de riesgo para cada portafolio puro no están en función de su riesgo específico, bajo la interpretación de que el APT descompone el riesgo sistémico que presenta el CAPM, la siguiente relación deberá ser cierta.

$$\beta_i \left(E\left[r_m\right] - r_f\right) = b_{i1}\left(E\left[r_{P_1}\right] - r_f\right) + b_{i2}\left(E\left[r_{P_2}\right] - r_f\right) \qquad (29)$$

Igualmente cada uno de los portafolios puros responde a una ecuación de comportamiento idéntica a (22), reemplazando (25) en (22), y después de alguna algebra, para los dos portafolios se obtiene.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= E\left[r_{P_1}\right] - r_f = \beta_{P_1}\left(E\left[r_M\right] - r_f\right) \\ \lambda_2 &= E\left[r_{P_2}\right] - r_f = \beta_{P_2}\left(E\left[r_M\right] - r_f\right) \end{aligned} \qquad (30)$$

Reemplazando (30) en (29) y reduciendo términos.

$$\beta_i = b_{i1}\beta_{P_1} + b_{i2}\beta_{P_2} \qquad (31)$$

La expresión (31) demuestra que las implicaciones del CAPM y APT no son muy diferentes, ya que el primero identifica el riesgo sistémico a través de un indicador general del mercado y el segundo descompone el riesgo sistémico en lo que se puede interpretar como las *fuentes* de ese riesgo.

Aunque las conclusiones del APT y el CAPM no disienten mucho, sin embargo es claro el valor teórico y empírico que tiene de más el APT, puesto que le permite a los inversionistas tener mayor libertad al momento de identificar los factores que afectan los retornos futuros de sus activos, en otras palabras le da a los agentes más herramientas para que administren de una mejor forma su exposición al riesgo.

En cuanto a las diferencias entre el APT y el CAPM, a continuación se verán las más importantes a saber: primero, el APT descompone el riesgo sistémico en otros factores singulares a cada activo, sin embargo, mantiene un solo factor común para todos los activos y portafolios y segundo el CAPM utiliza el supuesto de que los mercados son completos, es decir, que existen todos los activos y posibilidades para diversificar el riesgo específico y el APT trabaja bajo el supuesto de mercados cuasi-completos que consiste en la existencia de la mayoría de herramientas para diversificarse.

El APT surge como una alternativa al modelo CAPM, relajando algunos de los supuestos de este último, sin embargo, para hacer una mejor aproximación al comportamiento del inversionista en mercados financieros, se hace necesario un modelo que considere múltiples periodos de tiempo.

4. INTERTEMPORAL CAPM (ó CAPM continuo) ROBERT MERTON

En la realidad la negociación de activos financieros por parte de los agentes, se da en un ambiente intertemporal, por tal razón un modelo como el CAPM no tienen en cuenta el comportamiento dinámico de los precios a través del tiempo, ya que son modelos estáticos.

Aunque el CAPM provee una buena especificación de la relación entre el retorno de un activo o de un portafolio con respecto al mercado, la evidencia empírica muestra que para los activos con betas *bajos* el retorno es mayor en promedio y para los activos con betas *altos* el retorno es menor en promedio que el pronosticado por el modelo.

La crítica principal hecha al CAPM es que es un modelo estático (un único periodo), aunque por lo general este modelo es tratado como si fuera intertemporal. Fama ofrece una explicación, que sostiene que sí las preferencias y el conjunto de oportunidades de inversión futura son estado-independientes, la maximización del portafolio intertemporal se puede realizar maximizando el portafolio en cada periodo del tiempo, implicando así que el inversionista posee una función de utilidad esperada de un solo periodo. Implícitamente el CAPM trabaja con un conjunto constante de oportunidades de inversión futura, sin embargo y como lo explica Merton, las decisiones que toma un inversionista son muy diferentes si por ejemplo desea tener un bono del gobierno por diez años o busca ganancias a corto plazo, en otras palabras el conjunto de oportunidades de inversión futura es cambiante.

El modelo especificado por Merton trabaja sobre los siguientes supuestos:

1. La oferta de activos ya está dada.
2. No hay costos de transacción, impuestos, o problemas con indivisibilidad de los activos.
3. Existe un número suficiente de inversionistas con niveles de riquezas comparables, tales que, cada inversionista cree que puede comprar o vender tanto como el quiera de un activo a un precio determinado.
4. El mercado financiero siempre está en equilibrio, esto quiere decir que no se pueden hacer negociaciones con precios que no sean de equilibrio.
5. Existe un mercado para pedir o prestar dinero a una tasa de interés libre de riesgo.
6. Las ventas en corto para cualquier activo son permitidas.
7. La negociación de los activos se da continuamente en el tiempo.

Como se puede observar los supuestos del 1 al 6 son básicamente los mismos que en el CAPM, la diferencia está dada en el supuesto 7.

La continuidad de las negociaciones se puede inferir del supuesto 2, ya que no existen costos de transacción y los activos se pueden transar a cualquier escala, entonces el inversionista tiene la posibilidad de revisar su portafolio en cualquier momento del tiempo. Dado que en la realidad existen costos de transacción los intervalos de negociación[8] son estocásticos y su duración no es constante. Por lo tanto el asunto ahora no son las preferencias de los inversionistas sino más bien la estructura de mercado[7].

Para determinar la estructura de mercado es necesario analizar el valor de los activos y la dinámica de sus retornos, por eso en cada punto del tiempo el inversionista debe conocer: primero las probabilidades de transición para los retornos de cada activo sobre el siguiente intervalo de negociación y segundo, las probabilidades de transición en los periodos futuros, en otras palabras, debe conocer los procesos estocásticos de los cambios en el conjunto de oportunidades de inversión.

Para poder encontrar las probabilidades de transición es necesario que el activo se pueda definir como una distribución de probabilidad sobre unos pagos futuros.

Para Merton cada firma en el mercado solo puede emitir un solo activo para el cual se define un precio por participación $P(t)$ y el retorno de ese activo sobre un intervalo de tiempo de duración h, se obtiene a través de:

$$\frac{P(t+h)-P(t)}{P(t)} \qquad (32)$$

Como el modelo se desarrolla en un contexto de equilibrios a través del tiempo, cada movimiento de equilibrio a equilibrio representa ajustes en los retornos y en el valor del activo. En cuanto a los ajustes de los retornos estos reflejan los incrementos en la riqueza y el ajuste del valor del activo por la relocalización del capital con respecto a otras alternativas, por lo tanto la mejor manera para explicar estos ajustes es especificando el comportamiento de la dinámica de los retornos y el conjunto de oportunidades de inversión.

Al hacer el supuesto de que las negociaciones toman lugar en cualquier punto en el tiempo, permite especificar el comportamiento de los retornos y del conjunto de oportunidades como un proceso estocástico, de aquí que se necesiten tres nuevos supuestos:

8. El vector del proceso estocástico que describe el conjunto de oportunidades y sus cambios, es un proceso de Markov homogéneo en el tiempo[10]. Sin embargo, en el supuesto no es precisamente necesario que los retornos también sigan este proceso, solo con que sus determinantes sigan dicho proceso y según lo expuesto por Bachelier los precios de los activos son lo que siguen un proceso de Markov.

9. Solo cambios locales en las variables estado son permitidos[11]. Para el caso en el que h

8 En el CAPM el intervalo de negociación es uno solo, al principio del periodo.
9 Se seguirá el desarrollo realizado por Robert Merton en su trabajo "An Intertemporal CAPM" de 1973.
10 Es decir no depende del punto en el tiempo en donde se encuentre.
11 Se le denomina variable estado a aquella que no es estocástica, es una función determinìstica con respecto al tiempo.

tienda a cero los cambios en los precios y en el conjunto de oportunidades serán más pequeños.

10. Para cada activo en el conjunto de oportunidades en cada punto del tiempo t el retorno esperado por unidad de tiempo se define como:

$$\alpha \equiv E_t\left[{P(t+h)-P(t)} \Big/ {P(t)} \right] / h \qquad (33)$$

Y la varianza:

$$\sigma^2 \equiv E_t\left[\left(\frac{P(t+h)-P(t)}{P(t)} - \alpha h \right)^2 \right] / h \qquad (34)$$

Ambas expresiones existen, son finitas y son funciones continuas de h. Sí $h \to 0$ las expresiones anteriores se conocen como el retorno instantáneo y la varianza instantánea respectivamente[12].

Si existe un vector del proceso estocástico, $\{X(t)\}$ este será un proceso de difusión con cambios estado-espacio continuos y las probabilidades de transición cumplirán con la relación Chapman-Kolmogorov[13]. Dado esto se puede escribir ahora sí la dinámica de los retornos en función de un proceso aleatorio puro que cumpla con $E_t(y) = 0$ y $E_t(y^2) = 1$[14]:

$$\frac{P(t+h)-P(t)}{P(t)} = \alpha h - \sigma y(t)\sqrt{h} \qquad (35)$$

Ahora, para hallar la ecuación diferencial estocástica del cambio porcentual de los precios, lo primero es definir un proceso estocástico $z(t)$:

$$z(t+h) = z(t) + y(t)\sqrt{h} \qquad (36)$$

Que se caracteriza por tener incrementos independientes. Si $y(t)$ se distribuye de manera Gaussiana, entonces cuando h la expresión $z(t+h)-z(t)$ se comportará como un movimiento browniano:

$$dz \equiv y(t)\sqrt{dt} \qquad (37)$$

Segundo, se toma el límite de h cuando tiende a cero de la expresión que describe la dinámica de los retornos, (35), en este caso la expresión que resulta es el retorno instantáneo del i-esimo activo, entonces:

$$\frac{dP_i}{P_i} = \alpha_i dt + \sigma_i dz \qquad (38)$$

A (38) se le conoce como un proceso de Itô y es continuo y no diferenciable. Teniendo en cuenta que uno de los objetivos del inversionista es construir un portafolio, es importante saber como varia la dinámica del retorno del activo i cuando cambia la dinámica de otro activo j, esta información se obtiene a través del factor de correlación ρ_{ij} entre los movimientos brownianos dz_i y dz_j. Por lo tanto de (38) se puede deducir que para determinar el comportamiento del retorno de un activo son estadísticas suficientes el retorno esperado α_i, la volatilidad σ_i y el factor de correlación ρ_{ij} que para el modelo se supone que es constante, de esta manera la dinámica de los precios sigue un proceso de Markov si y solo si las estadísticas anteriores dependen de precio.

Para completar el análisis hace falta examinar el cambio en el conjunto de oportunidad de inversión futura, el inversionista valora o determina cual inversión es mejor que otra de acuerdo con lo que en promedio espera ganar y a que riesgo. En el caso del CAPM se supone que estas dos variables estaban fijas en el tiempo, y que están dadas por α_i y σ_i (el conjunto de oportunidades de inversión futura es constante), ahora se supone que estas variables cambian en el tiempo y para ello se establece las dinámicas de dichos cambios así:

$$\begin{aligned} d\alpha_i &= a_i dt + b_i dq_i \\ d\sigma_i &= f_i dt + g_i dx_i \end{aligned} \qquad (39)$$

Donde dq_i y dx_i son movimientos brownianos. Por lo tanto, con estas dos ecuaciones más el proceso de Itô de los precios se supone que la volatilidad y el valor esperado son estadísticas suficientes para reflejar el comportamiento de los activos.

12 Otra característica del supuesto 10, es que no permite que la incertidumbre desaparezca, $\sigma^2 = 0$, pero que tampoco domine el análisis, $\sigma^2 = \infty$.

13 La relación Chapman-Kolmogorov es una identidad probabilística en la cual se establece que es posible determinar las funciones marginales de distribución para una variable aleatoria que pertenece a un proceso estocástico y sobre el cual existe una función de distribución conjunta.

14 Para $y(t)$ y $y(t+s)$, para un mayor que cero, ambos procesos están idénticamente distribuidos y son independientes.

Para cerrar la caracterización del mercado de activos financieros, se dice que existe un número finito de activos riesgosos n, todos ellos distintos -el retorno de cualquier activo no se puede expresar como una combinación lineal de los otros. Además, existe un activo libre de riesgo, que permite conocer en cada punto del tiempo su retorno ($\alpha_{n+1} \equiv r(t)$) y volatilidad ($\sigma_{n+1} \equiv 0$) con certeza a los inversionistas, esto no implica que sus valores futuros sean ciertos ya que en su correspondiente ecuación diferencial estocástica $b_{n+1} \neq 0$. La función de este activo sin riesgo es permitir que cualquier inversionista pueda prestar o pedir prestado dinero a esa tasa, y se cumple para todos los inversionistas. El ejemplo clásico de este tipo de activos y con el que más se trabaja en los modelos es el de un bono de tesorería o del gobierno.

Hasta ahora se ha descrito las características y funcionamiento de los activos financieros, sin embargo, lo que sigue es la determinación de la elección del programa consumo-inversión por parte de los agentes.

Por tal motivo se hace el siguiente supuesto:

Existen K consumo-inversionistas cuyas preferencias están definidas por:

$$\max E_0\left[\int_0^{T^k} U^k\left[c^k(s),s\right]ds + B^k\left[W^k\left(T^k\right),T^k\right]\right] \quad (40)$$

Donde E_0 es el operador de esperanza condicional, $U^k[...]$ es la función de utilidad con respecto al consumo y al tiempo del k-esimo consumo-inversionista, además es una función de utilidad tipo Von Neuman-Morgesten, es decir, estrictamente cóncava y T^k es el tiempo de vida del k-esimo consumo-inversionista.

Ahora bien el flujo de consumo que se obtiene estará en términos de un solo bien de consumo y conociendo cual es el objetivo del agente en este modelo, entonces se puede describir el comportamiento de las variables estado del modelo.

Una manera de que el consumo-inversionista puede maximizar su función objetivo es a través de riqueza, el individuo empieza en el tiempo cero con una dotación inicial, $W^k(0)=W^k$. Sin embargo, como el problema de elección de consumo-inversión ahora es intertemporal, por lo tanto las ganancias o pérdidas en cada momento del tiempo por motivo de inversión deben estar representadas mediante una ecuación de acumulación de la forma:

$$dW = \sum_{i=1}^{n+1} w_i W \frac{dP_i}{P_i} + (y-c)\,dt \quad (41)$$

Es decir, el cambio en la riqueza será igual a sumatoria del cambio en los precios de los activos que posee el k-esimo individuo en su portafolio por la participación en el portafolio expresado en unidades de riqueza (ó el cambio neto en el valor del portafolio), más el ahorro proveniente del ingreso por salario. Donde la participación en la riqueza del activo i, w_i, es igual a $N_i P_i / W$, con N_i, como el número de unidades que posee el inversionista de dicho activo; y y *como* el ingreso por salario. Utilizando (38) que representa el cambio en los precios como un proceso de Itô, se puede reescribir (41) como:

$$dW = \left[\sum_{i=1}^{n} w_i\left(\alpha_i - r\right) + r\right]Wdt + \sum_{i=1}^{n} w_i W \sigma_i dz_i + (y-c)dt \quad (42)$$

Uno de los avances de este modelo con respecto al clásico CAPM, es que permite que la elección del inversionista sobre cuanto destinar de su riqueza para un activo riesgoso pueda superar el 100% de su riqueza, porque la restricción $\sum_{i=1}^{n+1} w_i = 1$, se puede satisfacer gracias al mercado alterno de dinero donde, en este caso, el individuo tendría que pedir prestado para poder garantizar que obtendrá las cantidades deseadas de ese activo.

Aunque la riqueza del inversionista se distribuya de la forma $W = \sum_{i=1}^{n+1} N_i P_i$, el supuesto de que es posible revisar el portafolio de inversión en cada momento del tiempo puede incentivar al inversionista a cambiar la composición de su portafolio, y la manera de hacerlo es controlando las cantidades que se poseen de los activos. Sin embargo, el inversionista tampoco puede aspirar a poseer todas las cantidades existentes en el mercado, ya que el valor neto de las nuevas unidades incorporadas al portafolio debe ser igual al valor del ahorro proveniente del ingreso por salario, dicha restricción se escribe:

$$(y-c)dt = \sum_{i=1}^{n+1} dN_1\left(P_i + dP_i\right) \quad (43)$$

Habiendo definido el comportamiento de las variables a las que se enfrenta el agente, lo siguiente es encontrar la forma en que el agente va a maximizar (40), la que esta en función del consumo y de la riqueza. Por simplicidad se asume que todo el ingreso que obtiene el agente resulta de las ganancias de los activos financieros, es decir $y=0$, además se agrupará el conjunto de oportunidades de inversión y el precio de cada activo en un vector X[15] de m elementos, y sigue un proceso de Itô de la forma:

$$dX = F(X)dt + G(X)dQ \qquad (44)$$

Entonces, en cada punto del tiempo el agente que actúa según (40) escogerá su consumo e inversión de acuerdo con la siguiente programación

$$0 = \max_{(c,w)} \left[\begin{array}{l} U(c,t) + J_t + J_W \left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i (\alpha_i - r) + r \right) W - c \right] \\ + \sum_{i=1}^{m} J_i f_i + \frac{1}{2} J_{WW} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} W^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} J_{iW} w_j W g_i \sigma_j \eta_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} J_{ij} g_i g_j v_{ij} \end{array} \right] \qquad (45)$$[16]

Donde η_{ij}, es la correlación instantánea entre los procesos de Winner dq_i y dz_j, v_{ij} es la correlación instantánea entre dq_i y dq_j. σ_{ij}, es la covarianza instantánea entre los retornos de los activos i y j. Hay n+1 condiciones de primer orden provenientes de (45), y son:

$$0 = U_c(c,t) - J_W(W,t,X) \qquad (46)$$

$$0 = J_W(\alpha_i - r) + J_{WW} \sum_{j=1}^{n} w_j W \sigma_{ij} + \sum_{j=i}^{m} J_{jW} g_j \sigma_i \eta_{ij} \qquad i = 1,2,....,n \qquad (47)$$

Tal y como en un problema de selección intertemporal la utilidad marginal del consumo presente debe ser igual a la utilidad marginal del consumo futuro, siendo esta condición la primera del primer orden y que se representará por la ecuación (46) y la ecuación (47) es la condición de segunda del primer orden, que permite obtener la demanda por el i-esimo activo, y queda de la forma.

$$w_i W = A \sum_{j=1}^{n} v_{ij} (\alpha_i - r) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} H_k \sigma_j g_k \eta_{jk} v_{ij} \quad i\text{-}1,2,.....n \qquad (48)$$

El primer termino de la derecha de (48), representa la función de demanda por un activo riesgoso en el caso de un solo periodo. El segundo término es la forma en que el agente se va a cubrir de situaciones "no favorables"[17] en el conjunto de oportunidades, a través de demandar el i-esimo activo.

Ahora bien, si se deriva (48) con respecto a η_{ij} se encuentra que los agentes se cubren de estos cambios no favorables demandando más del i-esimo activo entre más positiva sea el coeficiente de correlación entre el retorno del activo i y el cambio en x_l. Entonces, si la situación en el conjunto de oportunidades de inversión resulta ser menos favorable de lo que se esperaba, la cobertura tendrá efecto en la medida en que la riqueza del agente se incrementará a través del mayor retorno que le proveerá el activo i dada la correlación positiva entre el retorno y x_l. Por otro lado, sí los retornos realizados en el activo i son bajos, el agente se encontrará en un ambiente de poca incertidumbre, debido a que los cambios en el conjunto de oportunidades serán pequeños.

El anterior análisis es una de las grandes diferencias que posee este enfoque con el modelo clásico del CAPM. El consumo-inversionista tiene en frente un ambiente de inversión que cambia estocásticamente y que a su vez afecta su consumo, por tanto al hacer su maximización intertemporal su función de demanda por activos riesgosos debe ser diferente a la que tendría si fuera un modelo de un solo periodo e inclusive de un modelo multiperiodo pero con un conjunto de oportunidades de inversión constante. Lo que lleva a la conclusión que el modelo clásico del CAPM omite factores importantes a la hora de explicar la manera en que los agentes actúan en un mercado financiero.

El problema de asumir que el conjunto de oportunidades de inversión sea constante es que existe al menos un elemento que es observable, y este es la tasa de interés libre de riesgo. Ésta muestra un comportamiento estocástico y sirve como base suficiente para describir los cambios en las demás variables. Entonces para un nivel de riqueza dado, $\delta c/\delta r$ representa el cambio del consumo cuando cambia el conjunto de oportunidades, lo que per-

15 Donde cada componente del vector, x_i, hace referencia al nivel actual del conjunto de oportunidades de inversión y al precio del i-esimo activo.

16 Expresión tomada directamente del paper de Merton (1973), para ver la prueba de este resultado ver los papers de Merton (1969) y Merton (1971).

17 Una situación no favorable hace referencia a que cuando el conjunto de oportunidades de inversión cambia el consumo cae, es decir: $\frac{\partial c}{\partial x_k} < 0$

mite re-escribir (48) para el k-esimo agente de la forma:

$$d_i^k = A^k \sum_{j=1}^{n} v_{ij}\left(\alpha_i - r\right) + H^k \sum_{j=1}^{n} v_{ij}\sigma_{jr} \quad i=1,2,....,n \tag{49}$$

Donde $d_i^k \equiv w_i^k W^k$ y, $H^k \equiv -\left(\partial c^k/\partial r\right)/\left(\partial c^k/\partial W^k\right)$, σ_{jr} es la covarianza instantánea entre el retorno del activo j y los cambios de la tasa de interés. Ahora se hace el supuesto de que el n-esimo activo esta negativa y perfectamente correlacionado con los cambios en la tasa de interés, es decir $\rho_{nr} = -1$, lo que permite re-escribir la covarianza entre el activo i y j, como:

$$\sigma_{ij} = -g\frac{\sigma_{jn}}{\sigma_n} \tag{50}$$

Donde g es la desviación estándar de los cambios en la tasa de interés. Utilizando (50) se puede re-escribir (49) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} d_i^k &= A^k \sum_{j=1}^{n} v_{ij}\left(\alpha_j - r\right) \quad i=1,2,....,1 \;\; n-1 \\ d_n^k &= A^k \sum_{j=1}^{n} v_{ij}\left(\alpha_j - r\right) - g\frac{H^k}{\sigma_n} \end{aligned} \tag{51}$$

Para ver mejor los componentes que conforman (51), Merton amplia el Teorema de los fondos mutuos[18] con el fin de mostrar la manera en que se hacen coberturas y el comportamiento de las funciones de demanda por activos riesgosos.

Teorema de los Fondos Mutuos[19]

Dados n activos riesgosos y un activo libre riesgo, cuyo n-esimo activo esta negativo y perfectamente correlacionado con un activo libre de riesgo, existen tres portafolios (fondos mutuos) conformados por estos activos tales que:

(i) Todos los inversionistas aversos al riesgo que se comportan de acuerdo a (24) serán indiferentes entre escoger portafolios de los n+1 activos o de los tres fondos mutuos.
(ii) Las proporciones de cada fondo mutuo invertido en un activo dependerán solamente de las variables en el conjunto de oportunidades de inversión y no de las preferencias de los inversionistas.
(iii) Las demandas de los inversionistas por los fondos no necesitan conocimiento del conjunto de oportunidades de inversión asociado a un activo ni tampoco de la proporción de éste dentro del fondo.

Supóngase que el primer fondo esta conformado por los n-1 activos riesgosos, el segundo solo por el n-esimo activo y el tercero solo por el activo libre de riesgo. Además, sea λ_i^k la proporción invertida en el fondo i por el k-esimo inversionista, con $i=1,2,3$ y $\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^k = 1$, las proporciones óptimas invertidas en los fondos que replican son:

$$\begin{aligned} \lambda_1^k &= A^k\frac{\left(\alpha - r\right)}{\sigma^2 W^k} \\ \lambda_2^k &= -g\frac{H^k}{\sigma_n W^k} \end{aligned} \tag{52}$$

Donde α y σ^2 son el retorno esperado y varianza del primer fondo. La proporción invertida en el tercer fondo será aquella que haga cumplir la restricción $\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^k = 1$. Los fondos uno y tres cumplen la misma función que el CAPM clásico, le ofrece al inversionista una manera de localizar su riqueza en un plano riesgo-retorno. La idea de ampliar el concepto de Markowitz-Tobin de dos fondos mutuos a tres, es el de capturar e interiorizar el comportamiento estocástico del conjunto de oportunidades de inversión dentro de las funciones de demanda por activos riesgosos, dado el coeficiente de correlación del n-esimo activo el fondo número dos ayuda a cubrirse contra cambios "no favorables" en el conjunto de oportunidades. Es decir, cuando:

o El consumo cae cuando la tasa libre de riesgo aumenta o los cambios son "no favorables", $\partial c^k/\partial r < 0$, la demanda por el segundo fondo $\lambda_2^k W^k < 0$, se vende en corto el n-esimo activo que tiene un coeficiente de correlación negativo con la tasa libre de riesgo. El agente será recompensado por una ganancia al vender caro y comprar barato.

18 El Teorema de los fondos mutuos fue desarrollado por Markowitz y Tobin, en el cual establecen que todos los portafolios óptimos que se pueden conformar son posibles de representar como una combinación lineal de dos portafolios los cuales uno tendrá solo el activo libre de riesgo y el otro todos los activos riesgosos.

19 La prueba de este teorema se encuentra en el paper "An intertemporal Capital Asset Pricing Model" de Merton (1973). Por simplicidad no se probarán los resultados mostrados, con el fin de focalizar el trabajo en la intuición que estos brindan.

- El consumo aumenta cuando la tasa libre de riesgo aumenta $\partial c^k/\partial r > 0$, $\lambda_2^k W^k = 0$, ya que el agente debe seguir el principio de diversificación, lo que implica suavizar su consumo.
- El consumo no cambia cuando la tasa libre de riesgo aumenta $\partial c^k/\partial r = 0$, $\lambda_2^k W^k = 0$; si el consumo es independiente del comportamiento del conjunto de oportunidades no hay incentivos para realizar alguna cobertura.

Ya se mostró que el Teorema de los fondos mutuos es consistente con el análisis del modelo, el siguiente paso es determinar ahora los factores que determinan o ayudan a explicar el retorno esperado de un activo riesgoso. Dadas las demandas agregadas para los n activos:

$$D_i = A\sum_{j=1}^{n} v_{ij}\left(\alpha_j - r\right) \quad i=1,2,\ldots,1 \;\; n-1$$
$$D_n = A\sum_{j=1}^{n} v_{nj}\left(\alpha_j - r\right) - g\frac{H}{\sigma_n} \qquad (53)$$

Donde $A \equiv \sum_{k=1}^{K} A^K$ y $H \equiv \sum_{k=1}^{K} H^K$. Entonces $\sum_{i=1}^{n+1} D_i \equiv M$, es el valor de equilibrio del mercado, y tendrá asociado un precio P_M que al igual que el precio de un activo sigue un proceso de Itô de la forma:

$$\frac{dP_M}{P_M} = \left[\sum_{j=1}^{n} w_j\left(\alpha_j - r\right) + r\right]dt + \sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_j dz_j \qquad (54)$$

De (53) y (54) se puede encontrar el retorno esperado de equilibrio para los n-1 activos.

$$\alpha_i - r = \frac{\sigma_i\left[\rho_{iM} - \rho_{in}\rho_{nM}\right]}{\sigma_i\left(1-\rho_{in}^2\right)}\left(\alpha_M - r\right) + \frac{\sigma_i\left[\rho_{in} - \rho_{iM}\rho_{nM}\right]}{\sigma_i\left(1-\rho_{Mn}^2\right)}\left(\alpha_n - r\right) \qquad (55)$$

La ecuación (55) indica que los inversionistas son compensados por asumir un riesgo sistémico y adicionalmente por los cambios en el conjunto de oportunidades de inversión. Además si un activo no posee riesgo sistémico, su retorno esperado no es igual a la tasa libre riesgo, esta predicción difiere de la otorgada por el CAPM clásico. Por construcción el n-esimo activo esta negativa y perfectamente correlacionado con la tasa libre de riesgo y no guardan correlación con algún otro activo o el mismo mercado, es decir, posee un beta igual a cero, entonces ¿Por qué se paga una prima de riesgo por este activo?. Aunque el n-esimo activo no posee riesgo sistémico en el largo plazo no se cumple $\alpha_n = r$, lo que implica que los inversionistas están dispuestos a pagar un precio por acceder a esta herramienta de cobertura contra los cambios en el conjunto de oportunidades de inversión.

Es así como este nuevo enfoque que ofrece Merton del CAPM brinda la posibilidad de aumentar la capacidad de explicar los retornos esperados de los activos financieros a través del comportamiento estocástico del conjunto de oportunidades de inversión, que en la versión clásica del CAPM se consideraba constante. Por tanto sus predicciones -por ahora en el campo teórico- son más precisas y consistentes que los modelos presentados anteriormente, entonces se espera que el CAPM en tiempo continuo este más acorde con la evidencia empírica.

5. MERCADOS EFICIENTES

Un mercado eficiente es aquel en donde los precios de los bienes reflejan completamente toda la información disponible hasta el momento, en el caso del mercado financiero en vez de bienes existen son activos financieros. Para mirar más rigurosamente esta idea es necesario dar algunas bases teóricas en las que se fundamenta la teoría de mercados eficientes[20].

Los eventos en el mercado de acciones se dan en tiempo discreto y sea:

ϕ_{t-1} = El conjunto de información disponible y relevante para determinar el precio de los activos financieros en el tiempo t-1.

ϕ^m_{t-1} = El conjunto de información utilizada por el mercado para determinar el precio de los activos financieros en el tiempo t-1. Este conjunto es subconjunto de ϕ^m_{t-1}, es decir contiene como máximo toda la información disponible y relevante.

$p_{j,t-1}$ = El precio del activo j en el tiempo t-1, con j=1,….,n.

$f_m\left(p_{1,t+\tau},\ldots,p_{n,t+\tau} \mid \phi^m_{t-1}\right)$ = La distribución de probabilidad conjunta de los precios de los activos

20 Se sigue el desarrollo del libro de Fama "Foundations of Finance", Cap. 5 "Efficient Capital Markets". La evidencia empírica presentada corresponde a los modelos de Retornos Esperados Constantes y Modelo de Mercado basado en el estudio de FFJR.

para el tiempo $t+\tau$ (con tao mayor o igual a cero), asignada por el mercado según ϕ^m_{t-1}.

$f\left(p_{1,t+\tau},\ldots,p_{n,t+\tau} \mid \phi^m_{t-1}\right)$= La verdadera distribución de probabilidad conjunta de los precios de los activos para el tiempo $t+\tau$ (con tao mayor o igual a cero), deducida de ϕ_{t-1}.

Entonces dado ϕ^m_{t-1}, el mercado asigna una función de distribución de probabilidad sobre los precios en el tiempo t, f_m, según las características de dicha distribución el mercado establece el nivel de los precios en el tiempo t-1 a través de un moldeo de mercado, con el fin de igualar la demanda con la oferta del activo financiero. La condición que debe cumplir un mercado eficiente es:

$$\phi^m_{t-1} = \phi_{t-1} \qquad (56)$$

Es decir, el mercado utiliza toda la información disponible y relevante para la formación de los precios de los activos financieros. De (56) se pueden tener otras condiciones de eficiencia de mercado:

$f_m\left(p_{j,t} \mid \phi^m_{t-1}\right) = f\left(p_{j,t} \mid \phi_{t-1}\right)$ (57): El mercado usa toda la información disponible y la usa correctamente para determinar los precios futuros. Lo que implica.

$$E_m\left[\tilde{p}_{jt} \mid \phi^m_{t-1}\right] = E\left[\tilde{p}_{jt} \mid \phi_{t-1}\right] \qquad (58)$$

$$E_m\left[\tilde{R}_{jt} \mid \phi^m_{t-1}\right] = E\left[\tilde{R}_{jt} \mid \phi_{t-1}\right] \qquad (59)$$

El valor esperado del precio asignado por el mercado es igual al verdadero valor esperado (59), por lo tanto el retorno esperado por el mercado es el retorno esperado verdadero.

Para realizar un test de mercados eficientes es necesario establecer una relación entre $f_m\left(p_{1,t},\ldots,|p_{n,t}\ \phi^m_{t-1}\right)$ y $p_{1,t},\ldots,p_{n,t}$ a través de un modelo de equilibrio a continuación se presentan los dos modelos utilizados para la estimación.

6. RETORNOS ESPERADOS CONSTANTES

Dado el conjunto de información y la función de distribución sobre los precios en el tiempo t-1, el mercado establece $E_m\left[\tilde{p}_{jt} \mid \phi^m_{t-1}\right]$. Luego el mercado elije el nivel del precio en t-1 tal que el retorno esperado sea igual a una constante y a su vez igual para cada instante de tiempo, de la forma:

$$E_m\left[\tilde{R}_{jt} \mid \phi^m_{t-1}\right] = \frac{E_m\left[\tilde{p}_{jt} \mid \phi^m_{t-1}\right] - p_{j,t-1}}{p_{j,t-1}} = E\left[\tilde{R}_j\right] \qquad (60)$$

Y utilizando (58) y (59) se puede deducir que el retorno esperado por el mercado es el verdadero retorno esperado y es una constante.

$$E\left[\tilde{R}_{jt} \mid \phi_{t-1}\right] = E_m\left[\tilde{R}_{jt} \mid \phi^m_{t-1}\right] = E\left[\tilde{R}_{jt}\right] \qquad (61)$$

Lo que implica (61) es que no es posible utilizar alguna información disponible en t-1[21] para pronosticar los retornos esperados. Para poder obtener evidencia empírica que permita rechazar o no (61), el test se concentra en un subconjunto de ϕ_{t-1}, la información histórica de los retornos. Bajo este procedimiento y por (61), lo que busca es probar que los retornos pasados no son una fuente de información para predecir su comportamiento futuro, es decir:

$$E\left[\tilde{R}_{jt} \mid R_{j,t-\tau}\right] = E\left[\tilde{R}_j\right] \qquad (62)$$

Para todo Tao (...) mayor que cero. Entonces, al correr una regresión con el retorno esperado como variable dependiente en función de sus retornos pasados, los coeficientes estimados no deben ser significativamente diferentes de cero, lo que deja solo a la constante como variable suficiente para explicar los retornos esperados.

Por simplicidad, lo anterior es igual a probar que no existe autocorrelación de ninguno en la serie histórica de los retornos. La Hipótesis Nula implicada de acuerdo a la ecuación (61) estimada, que se rechaza si se prueba que la serie histórica de retornos de un activo guarda autocorrelación con cualquier rezago. Sí esto ocurre, se dice que el mercado no es eficiente bajo el modelo de Retornos Esperados Constantes, o en otras palabras los precios pasados del activo no reflejan correctamente la información disponible.

7. MODELO DE MERCADO

Sea $\tilde{R}_{mt}$ el retorno sobre el portafolio de mercado, el retorno esperado de un activo j dada

21 Por tanto en ningún otro periodo atrás.

toda la información disponible y relevante se describe como:

$$E\left[\tilde{R}_{jt} \mid \phi_{t-1}, \tilde{R}_{mt}\right] = \alpha_j + \beta_j \tilde{R}_{mt} \qquad (62)$$

Bajo la condición

$$E\left[\tilde{\varepsilon}_{jt} \mid \phi_{t-1}, \tilde{R}_{mt}\right] = 0 \qquad (63)$$

Por (63) se deduce que toda la información en t-1 es utilizada para determinar los precios en ese mismo intervalo, ya que toda desviación de la media se da solo por la nueva información que estará disponible en t. Sí (63) no se cumple, quiere decir que la información no está siendo usada correctamente y que la desviación de cero por parte del termino de perturbación se debe a información que estaba disponible en el periodo anterior, por tanto se refleja un retraso en el ajuste del precio a la información disponible llevando así a que (39) no se cumpla, y el mercado sea un mercado ineficiente.

Los precios siguen el mismo proceso descrito con anterioridad. El mercado asigna la función de distribución conjunta y con base en ella describe los retornos esperados según el modelo de mercado.

$$E_m\left[\tilde{R}_{jt} \mid \phi_{t-1}^{m}, \tilde{R}_{mt}\right] = \alpha_j^{m} + \beta_j^{m} \tilde{R}_{mt} \qquad (64)$$

También bajo la condición

$$E_m\left[\tilde{\varepsilon}_{jt}^{m} \mid \phi_{t-1}, \tilde{R}_{mt}\right] = 0 \qquad (65)$$

Sí el conjunto de información que utiliza el mercado es igual al conjunto de información disponible y relevante, entonces se cumple que (65) es igual a (63) y el mercado es un mercado eficiente.

8. EVIDENCIA EMPÍRICA PARA COLOMBIA

En este capitulo se muestran los resultados de la estimación obtenidos con cada uno de los modelos para el mercado accionario Colombiano durante el periodo 2001 al 2006. La estimación se hizo año por año y se utilizaron los retornos diarios de las acciones que cotizan en la BVC para las cuales más del 60% de los retornos no fueran iguales a cero en ese año (cada año se logró conseguir 13 acciones), así mismo en cada periodo de estimación se construyeron 11 portafolios de dos acciones, 7 de tres acciones y 6 de cuatro acciones. La tasa de interés libre de riesgo utilizada es la tasa de Depósito a Termino Fijo (DTF)[22] a 90 días Efectiva Anual. El retorno del Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia (IGBC) representa el retorno del portafolio de mercado. El activo de largo plazo utilizado en la estimación del modelo CAPM continuo es un bono de Tesorería emitido el 17 de febrero del 2000 con vencimiento en el 2020[23].

Debido a que el análisis es de series de tiempo, los retornos sobre las acciones son continuamente compuestos, y se calcularon de la forma:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Además con los retornos continuamente compuestos la cláusula de responsabilidad limitada no se viola. Esta cláusula se refiere a que en ninguna inversión se puede perder más de lo que se invirtió, es decir, el retorno bruto de la inversión no puede ser menor que cero, $(1+R_t)\geq 0$. El supuesto frecuentemente hecho sobre los retornos simples R_t, es que se distribuyen normal, por lo tanto existe la probabilidad de que R_t tome valores menores a -1, incumpliendo la cláusula de responsabilidad limitada, es decir existe la posibilidad que el retorno bruto sea menor a cero.

Se pronosticó seis meses adelante para cada año y se evaluó dicha predicción mediante el R^2 de la siguiente regresión.

$$\begin{aligned} r_{it} &= c_o + c_1 \hat{r}_{it} + u_{it} \\ Cov(u_t, u_k) &= 0 \qquad \forall t \neq k \end{aligned} \qquad (66)$$

22 Lo ideal seria utilizar la tasa de los bonos de Teoría (TES), sin embargo la serie histórica de las cotizaciones diarias de dichas tasas no se encuentra disponible para un periodo tan largo. Este hecho no resta validez al análisis debido a la DTF también es un indicador de inversión a corto plazo.

23 No se utilizó un bono de menos plazo por recomendación del Grupo de Mercado de Capitales Externos del Ministerio de Hacienda, debido a que los otros bonos se encuentran muy alejados de la curva de rentabilidad de los TES y por tanto no son un buen indicador de largo plazo.

CAPM: Evidencia Empírica

En los cálculos de la investigación se encuentran las estimaciones del CAPM para las acciones y portafolios respectivamente. La regresión utilizada es:

$$r_{i,t} = c + \beta_i \left(r_{m,t-1} - r_f\right) + \varepsilon_{i,t} \quad (67)$$

Para la gran mayoría de las acciones y portafolios la sensibilidad hacia el riesgo de mercado (ß) resultó ser significativo para explicar los retornos esperados.

Sin embargo, utilizando el R2 para calificar la bondad del modelo CAPM, se puede ver que en promedio tanto para acciones como para los portafolios, el R2 se encuentra entre el 2% y el 10% para todos los periodos de estimación, es decir, la varianza de los retornos esperados en el mercado accionario colombiano entre los años 2001 y 2006 es explicada entre un 2% y 10% por la prima de riesgo. Para hallar la razón de porque el R^2 es tan bajo, es de gran ayuda repasar la expresión del R^2.

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{\left(E[r_i] - r_f - \beta_i\left(r_m - r_f\right)\right)\left(E[r_i] - r_f - \beta_i\left(r_m - r_f\right)\right)}{\left(E[r_i] - \mu\right)\left(E[r_i] - \mu\right)} \quad (68)$$

Donde SSE: Suma de Errores al Cuadrado y SST: Suma Total de Cuadrados. La razón por la cual el R^2 arrojado por el CAPM es tan bajo es que la SSE es muy grande, en otras palabras, entre los retornos esperados estimados por el modelo y los observados existen una gran diferencia, concluyendo así que la especificación clásica del CAPM captura muy deficientemente el comportamiento de los retornos a través de la prima de riesgo.

Además tomando la interpretación teórica del error como el indicador de riesgo específico y despejando de (68) SSE/SST, se puede decir que en promedio entre un 90% y 98% de la varianza en los retornos esperados es explicada por el riesgo específico que posee cada activo financiero.

La alta participación del riesgo específico en la variación de los retornos es indicio de que el error esta autocorrelacionado, lo cual es indica que existe un rezago en el ajuste de información en el mercado, evidenciando que el mercado accionario colombiano no es eficiente. La información pasada tiene un efecto persistente sobre el retorno esperado hoy, es decir, el precio actual de una acción no tiene descontada toda la información hasta la fecha.

Dada la gran diferencia entre el retorno esperado observado y el estimado lo que se espera del pronóstico es muy poco, tal y como se puede apreciar desde los cálculos desarrollados en la investigación, el R^2 de la regresión (66) es también muy bajo. En promedio para los periodos de proyección el R^2 para las acciones se encuentra en el 4%, para los portafolios de dos acciones en el 7%, para los portafolios de tres acciones en el 9% y para los de cuatro en el 8%; lo cual es muy pobre dado que se espera que el pronostico del retorno estimado por el CAPM explique casi el 100% de la varianza de los retornos observados, en otras palabras el retorno estimado por el CAPM no refleja el verdadero retorno realizado en el periodo de pronóstico.

APT: Evidencia Empírica

La principal consideración a tener en cuenta cuando se estima este modelo es que debe existir la suficiente información para poder replicar el comportamiento del portafolio de mercado a través de otros indicadores o variables que sean capaces de desagregar el riesgo de mercado.

Dada la frecuencia utilizada en los datos (diaria) son muy pocas las variables económicas que son compatibles con dicha frecuencia por tanto de esta estimación se han excluido variables económicas que poseen gran impacto en el mercado de capitales, algunas de ellas son Inflación, PIB y Tasa de Desempleo, debido a que se encuentran en frecuencias diferentes a la de la muestra utilizada en la investigación, por ejemplo la inflación se encuentra mensual y el PIB trimestral.

Una manera de incluir estas variables en la estimación del APT sería trabajar con frecuencias semestrales, pero al tomar como portafolio de mercado el IGBC que fue creado en el 2001 se conformaría una muestra de mas o menos 12 observaciones, la cual no tendría suficiente significancia estadística con la cual se pueda emitir conclusiones bien argumentadas sobre los resultados de la estimación.

Como se muestra en la sección de Páneles del trabajo completo, los cuales incluyen 12 páneles, los factores utilizados son la Tasa de Cambio, la Unidad de Valor Real (UVR) y el portafolio de mercados emergentes (EMF)[24]. Las razones por la que se utilizaron dichos factores son que la Tasa de Cambio se toma como un activo financiero más en el mercado de capitales y actualmente es muy utilizado por lo corredores para realizar coberturas y diversificar portafolios y representa - o al menos se supone - los movimientos de capitales hacia mercados extranjeros o movimientos de capitales extranjeros hacia nuestro mercado, lo que hace parte del riesgo de mercado.

Otro factor de riesgo importante es el tipo de economía en el que se desarrollan las inversiones en activos financieros, el retorno esperado y el riesgo que se esta dispuesto a correr por él dependen en gran medida de si la economía del país es emergente o desarrollada. Sí la inversión se realiza en un país como Colombia (economía emergente) el inversionista esta dispuesto a correr un mayor riesgo con la expectativa de recibir un mayor retorno en un periodo corto de tiempo, en cambio, sí la inversión se realiza en EE.UU. el riesgo es menor en comparación con Colombia por lo tanto el retorno esperado por el inversionista es menor.

Por eso es tan importante para los inversionistas seguir el comportamiento de las Bolsas de Valores de los países emergentes con el fin de detectar momentos claves en los cuales pueden introducir sus capitales a estos mercados. El Emerging Market Fund (EMF) representa el mercado de acciones de economías emergentes y es utilizado por los inversionistas extranjeros para percibir el clima de estos mercados (situaciones a la baja o al alza) e identificar oportunidades de ganancia.

Por último el retorno esperado por el inversionista se encuentra en términos nominales, es decir, es un retorno al cual no se le ha descontado la inflación y según Fisher, la tasa de interés nominal es igual a la tasa interés real más las expectativas de inflación expresada por:

$$i_{nom} = i_{real} + \pi^{e}$$

Las expectativas que tengan los agentes sobre el cambio en los precios altera de manera significativa el retorno sobre las inversiones, por ejemplo si las expectativas de inflación empiezan a incrementarse el Banco Central tendrá que subir la tasa de interés nominal para mantener el poder adquisitivo de la economía (tasa de interés real), esto tiene un efecto directo en el mercado de Bonos de Tesorería depreciando el valor presente del flujo futuro de estos bonos y disminuyendo su precio llevando así a que los inversionistas prefieran acciones, y por fuerzas de demanda y oferta el precio de las acciones se ve afectado al igual que el retorno sobre ellas. Lo ideal sería hacer la estimación con la Inflación directamente pero por las razones expuestas con anterioridad no es posible, por eso se utilizó la UVR que representa las expectativas sobre la inflación[25].

Para cada uno de estos factores se estimó con base en la ecuación (64) y según los cálculos obtenidos, el beta para la UVR (0.00130024) y EMF(0.07702074) resultó no significativamente diferente de cero, por lo tanto se incumple la paridad planteada por la expresión (40)[26] ya que por el lado del APT daría cero y por la estimación anterior del CAPM se encontró que para las acciones y portafolios la mayor parte de los betas sí resultaron ser significativos, es decir no son cero.

Lo anterior lleva a concluir que dichos factores no son capaces de replicar el comportamiento del portafolio de mercado y por tanto del riesgo sistémico. Para la TRM el beta (-0.0411969) si resultó ser significativamente diferente de cero y tiene el signo esperado (negativo), este signo es coherente con lo expuesto anteriormente ya que las acciones y las divisas se ven como

24 EMF: portafolio creado por Morgan Stanley que contiene índices de 26 países con economías emergentes. Los países son: Argentina, Brasil, Chile, China, Colombia, Republica Checa, Egipto, Hungría, India, Indonesia, Israel, Jordania, Corea, Malasia, México, Marruecos, Pakistán, Perú, Filipinas, Polonia, Rusia, Sudáfrica, Taiwán, Tailandia, Turquía y Venezuela.

25 Anterior a la UVR existía el UPAC, que dependía de la inflación y la tasa de interés. Sin embargo el UPAC presentó un crecimiento enorme comprometiendo la sostenibilidad de los prestamos hechos en base a esta tasa, por lo tanto se creo la UVR que empezó con base 100, y el se calcula del día 14 al 16 del siguiente mes sobre las expectativas de inflación que posea la economía.

26 Esta paridad consiste en que el beta de mercado estimado por el CAPM debe ser igual a la suma de los betas de mercado de los factores multiplicados por su respectivo coeficiente en la expresión (39).

inversiones sustitutas, cuando el mercado accionario esta a la baja se espera que los inversionistas recompongan sus portafolios con activos financieros extranjeros aumentando la demanda por dólares y revaluando el peso. Sin embargo, no es sensato pensar que el riesgo sistémico del mercado de valores de Colombia pueda ser replicado por un solo factor, y aún si fuera así el beta para la TRM debería ser igual a 1.

La evidencia empírica de la estimación del APT utilizando los factores expuestos, arroja como conclusión que para el mercado de acciones Colombiano el riesgo de mercado no puede ser desagrado.

Existen dos razones posibles de estos resultados:

- la primera que los factores de riesgo aquí considerados no sean los correctos, en otras palabras, que teóricamente su relación con el mercado accionario no sea correcta.
- la segunda es que exista un problema de especificación de las variables.

Con respecto a la primera razón, existe un extenso material académico y empírico que demuestra que variables como la expectativa de inflación e índices de confiabilidad y riesgo son determinantes básicos a la hora de escoger el mercado donde invertir y/o conformar un portafolio, por tanto a criterio de los investigadores esta razón no es la correcta para explicar los resultados obtenidos.

La segunda razón, como ya se mencionó anteriormente, las variables fundamentales para el análisis han sido excluidas por tanto los factores utilizados en esta investigación son forzados -al menos en la parte empírica- a explicar en su totalidad el riesgo que enfrenta un inversionista en la BVC, por esto la segunda razón (problema de especificación de variables) resulta ser la más acertada a la hora de explicar los pobres resultados estimados por el APT para el caso Colombiano.
De todas maneras afirmar que en el mercado accionario colombiano no es posible desagregar el riesgo sistémico, no es del todo correcto, ya que en la practica los inversionistas y traders sí tienen en cuenta los niveles de las variables excluidas en esta investigación y de otras más para conformar sus portafolios y predecir retornos. El problema radica en que no existe todavía suficiente información e historia en la BVC que permita aprovechar las ventajas de la estimación APT y obtener conclusiones con la suficiente y necesaria relevancia estadística.

Como alternativa a este modelo se estimó el modelo de mercados eficientes de Fama, Fisher, Jensen y Roll (FFJR) para sustentar el resultado encontrado por la estimación del CAPM, en donde se evidencia el no cumplimiento del supuesto de mercados eficientes.

MERCADOS EFICIENTES: evidencia empírica

En las tablas, gráficos y pruebas econométricas del documento de la investigación completa las Funciones de Autocorrelación y Función de Autocorrelación Parcial sobre la serie histórica de los retornos de la acción del Banco de Bogota, en la cual se prueba que los rezagos son significativos a los niveles de confianza 1%, 5% y 10% por lo que se puede inferir que existe autocorrelación entre los rezagos, es decir, es posible encontrar información relevante en los retornos pasados para la estimación de los retornos esperados, por tanto se rechaza (57) y no se cumple con la condición establecida en (58). Resulta incorrecto que el retorno esperado por el mercado para la acción del Banco de Bogotá sea una constante y la misma para todos los intervalos de tiempo, ya que es posible obtener sistemáticamente un pronóstico diferente por medio de la información guardada en los retornos pasados, concluyendo que el mercado no esta utilizando correctamente toda la información disponible, por lo tanto (52) no se mantiene y el mercado es ineficiente bajo el modelo de Retornos Esperados Constantes.

Para confirmar el resultado encontrado anteriormente es necesario tener en cuenta otro tipo de información dentro de ϕ_{t-1}. El Modelo de Mercado permite introducir la incertidumbre generada por factores ajenos al activo financiero y que influyen en los retornos esperados.

Modelo de mercado FFJR: evidencia empírica

La metodología desarrollada por FFJR se basa en estudiar eventos particulares del mercado, como *splits*, pagos de dividendos, compras y fusiones; después se analiza el comportamiento de los residuos para probar (68) y por tanto (66). Para realizar este test en la BVC se escogió la compra por parte del Grupo Aval de MegaBanco el 16 de Marzo de 2006, y se analizaron los residuos obtenidos utilizando los retornos sobre la acción del Banco de Bogota[27]. Los residuos se obtuvieron por medio de la regresión:

$$r_t = \alpha + \beta r_{m,t-1} + \varepsilon_t \qquad (69)$$

El retorno del portafolio de mercado está representado por el retorno sobre el IGBC. Dado que en el conjunto de información disponible solo se encuentra el nivel actual de las variables, el retorno del portafolio de mercado en el tiempo t, es desconocido en t-1, por esta razón es que esta variable está rezagada un periodo en la expresión (69).

El resultado de la regresión es el siguiente:

```
Linear Regression - Estimation by Least Squares
Dependent Variable BANCO DE BOGOTA
Daily(5) Data From 2005:10:17 To 2006:09:15
Usable Observations    240 Degrees of Freedom   238
Centered R**2 0.143059 R Bar **2   0.139458
Uncentered R**2    0.144643  T x R**2      34.714
Mean of Dependent Variable          0.0011028856
Std Error of Dependent Variable     0.0256795282
Standard Error of Estimate          0.0238217130
Sum of Squared Residuals            0.1350588144
Regression F(1,238)                39.7321
Significance Level of F             0.00000000
Log Likelihood                    557.37681
Durbin-Watson Statistic             1.779206

   Variable             Coeff            Std Error           T-Stat       Signif
*******************************************************************************
         1.  Constant       0.0006268300      0.0015395386    0.40715      0.68426049
         2.  IGBC{1}        0.3975710478      0.0630731099    6.30334      0.00000000
```

El estudio muestra que efectivamente la media del residuo para esta estimación es cero y se confirma mediante la prueba de Hipótesis (sobre la media=0) utilizando una distribución t que arroja una probabilidad igual a 1 por lo tanto no se puede rechazar la Hipótesis Nula de que la media=0.

Sin embargo, al analizar las funciones de ACF y PACF en donde se evidencia que el residuo esta correlacionado ya que los rezagos son significativos a un nivel de significancia del 5%, lo que indica que la influencia de los factores específicos relacionados con el Banco de Bogota no han sido del todo capturados por el IGBC, en otras palabras (52) no se cumple, existe cierta información por parte de algún grupo de inversionistas que no es de conocimiento publico y por tanto el precio no refleja completa y correctamente toda la información, convirtiendo al mercado accionario en un mercado ineficiente.

El estudio también muestra el comportamiento del residuo y el residuo acumulado. Alrededor del día 20 antes de la compra los residuos estimados de la regresión (69) son negativos lo que quiere decir que el modelo esta sobreestimando los retornos, pero a medida que la fecha efectiva de la compra se acerca los residuos estimados son positivos, indicando que el modelo de mercado no alcanza a capturar los movimientos especulativos que se empiezan a gestar alrededor de la acción de Banco de Bogotá por lo que se termina sub-estimando los retornos.

27 Se escogió este evento ya que Banco de Bogotá pertenece al Grupo Aval, y también hace parte de la muestra sobre la que se estimo el CAPM y el CAPM continuo. Además el Banco de Bogotá es la entidad que absorberá a MegaBanco.

Después del día de compra de MegaBanco por parte del Grupo Aval, los residuos estimados se estabilizan y se dispersan alrededor de cero, comportamiento se considera normal debido a que el periodo especulativo terminó y ahora el precio de la acción de Banco de Bogota se rige por las dinámicas del mercado. Este mismo análisis obtuvo FFJR al analizar splits de 940 acciones del NYSE, lo cual deja ver que aunque en el mercado accionario colombiano los precios no reflejen total y correctamente toda la información, se presentan los mismos comportamientos por parte de los inversionistas que en un mercado altamente eficiente.

CAPM CONTÍNUO: Evidencia Empírica

Hasta ahora se ha analizado al mercado de capitales colombiano en base a relaciones de corto plazo, sin embargo, los agentes toman en cuenta el ambiente de inversión futuro para planear la estrategia de inversión a seguir. Igualmente los retornos de los activos se ven influenciados por esta visión de los agentes, sí el retorno de un activo representa el ingreso esperado en un tiempo corto entonces su rentabilidad se hace relativa con respecto a una inversión de largo plazo.

El modelo de Merton anteriormente expuesto ofrece esta opción a través de un bono de largo plazo permite visualizar la relación de largo plazo, entre las inversiones hechas en el mercado financiero, sujetos a cambios en el conjunto de oportunidades de inversión futura. El factor de correlación entre la DTF y el bono es de -0.0019 para toda la muestra, aunque el activo no esta perfectamente correlacionado sí tiene una correlación negativa (condición necesaria para desarrollar el modelo CAPM en tiempo continuo) con la tasa libre de riesgo que representa el conjunto de inversiones en el corto plazo. Este factor de correlación también indica que un cambio en el conjunto de oportunidades en el corto plazo afecta negativamente a las inversiones de largo plazo y viceversa, es decir existe una relación inversa entre estos dos tipos de inversiones. Los páneles desarrollados en el cuerpo de la investigación muestran los resultados obteni- ente regresión:

$$r_{i,t} - r_f = \beta_i \left(r_{m,t-1} - r_f \right) + \gamma_i \left(r_{0,t-1} - r_f \right) + \varepsilon_{i,t} \qquad (70)$$

Donde $r_{0,t-1}$ es el retorno continuamente compuesto del bono de largo plazo un periodo atrás. En la ecuación [42] del paper "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model" (Merton) se muestra la relación entre el beta de la prima de riesgo y el coeficiente de correlación parcial $(\rho_{in} - \rho_{iM}\rho_{nM})$ implícito en (48), si el beta es mayor a 1 este coeficiente tiene signo positivo, si el beta es menor a 1 el coeficiente tiene signo negativo y si el beta es igual a 1 este coeficiente es igual a cero.

Para el caso colombiano, esta condición no se cumple consistentemente además, de las 144 estimaciones realizadas solo en dos casos el coeficiente asociado a la prima de riesgo de largo plazo resultó no significativamente diferente de cero[28] por lo tanto el leve incremento en el R^2 se debe solo al aumento de variables explicativas en la matriz de diseño. Lo que evidencia que en el mercado de accionario colombiano hay ausencia de relaciones de largo plazo entre las inversiones que se realizan en este mercado.

De igual manera el valor tan pequeño de los R^2 refleja el mismo problema encontrado por los anteriores modelos, el mayor determinante del retorno sobre un activo financiero en la BVC es el riesgo especifico de dicho activo, y el mercado no es lo suficientemente eficiente para descontar toda la información disponible ocasionando que el precio no refleje correctamente toda la información disponible.

Al igual que en el CAPM clásico se evaluó el pronostico mediante el R^2 de (49). Debido al poco poder explicativo del CAPM continuo era de esperarse que el pronostico no fuera tan acertado, el R^2 sigue estando por debajo del 11% en promedio, lo que indica que el residuo de (49) explica más el retorno esperado observado que el retorno esperado estimado por (70), en otras palabras por el modelo CAPM continuo no es posible realizar una buena predicción de los retornos esperados.

28 La acción de Isa entre el segundo semestre de 2002 y primero de 2003, y la acción de Bancolombia entre el segundo de 2003 y primero de 2004.

9. CONCLUSIONES

En innumerables trabajos se han expuesto las deficiencias y virtudes empíricas de los modelos anteriormente expuestos, la gran mayoría de ellos o por lo menos los más famosos hacen referencia al mercado accionario de Estados Unidos. Mercado que se caracteriza por su gran tamaño y profundidad, al 31 de Diciembre de 2006 las compañías listadas en el New York Stock Exchange (NYSE) tenían un valor total de mercado igual a 26 trillones de dólares[29]. Además de poseer una gran gama de instrumentos o herramientas tales como opciones, swaps, forwards y futuros, que le permiten hacer coberturas y diversificaciones casi perfectas a los inversionistas, el NYSE se caracteriza por tener una red de información muy eficiente - y en general paginas web como Yahoo e Investpodeia - donde se puede conseguir cualquier tipo de información, noticias, indicadores, datos históricos y análisis técnico referente con alguna acción en particular.

Todas estas cualidades hacen que el NYSE sea lo más cercano a un mercado eficiente en la práctica, lo cual resulta de gran conveniencia al estimar los modelos, dado que es un supuesto fundamental en la construcción de los mismos. Sin embargo, al realizar la estimación tomando como base el mercado accionario Colombiano se encuentra que los modelos resultan ser muy poco efectivos a la hora de reflejar el comportamiento de los retornos sobre las acciones que cotizan en este mercado. A primera vista esto se debe a la diferencia en el tamaño del mercado, además el NYSE cuenta con más de 200 años de historia a diferencia de la BVC que recién inicio actividades en el 2001.

Aunque la evidencia empírica de los modelos estimados en esta investigación no sea tan precisa como lo es en otros mercados, si ayuda a determinar características interesantes del mercado accionario colombiano.

La primera de ellas y causa de las otras es que la BVC no es un mercado eficiente, como ya se demostró el mercado no utiliza toda la información disponible para establecer los precios de los activos ocasionando que estos no reflejen correctamente el valor fundamental o verdadero de los activos.

La segunda característica es que el riesgo no es proporcional al retorno, el rechazar la hipótesis del CAPM clásico implica que la prima de riesgo de mercado no es suficiente para explicar la varianza en los retornos y que el factor determinante es el riesgo específico, que posee errores de ajuste de información según la primera característica. Y por último también se demostró que no existen relaciones de inversión entre el corto y el largo plazo, es decir, el mercado esta sujeto solo a inversiones que buscan un alto rendimiento en un periodo corto.

Las anteriores características también fueron expuestas en el trabajo de grado "Burbujas Especulativas: Una Evidencia Empírica para el Mercado Accionario Colombiano 1997-2004"[30]. En este trabajo se demostró que en el mercado accionario colombiano se han presentado dos burbujas especulativas[31] entre 1997 y 2004, como consecuencia de ello se incrementó la volatilidad de los retornos y afectó la capacidad para poder predecirlos. Las razones de este fenómeno presentadas por los autores son la asimetría de información, la ausencia de relaciones de largo plazo y la ineficiencia del mercado, razones que concuerdan con las encontradas por esta investigación.

Lo expuesto anteriormente sustenta la creencia de que los mercados financieros de países con economías emergentes son mercados netamente especulativos, caracterizados por altos rendimientos y altas volatilidades en el corto plazo.

Además en el caso particular colombiano existen muchas dificultades a la hora de recolectar información para realizar una estimación como la del modelo APT, dada la carencia de información no fue posible utilizar este modelo para explicar el comportamiento de los retornos esperados y los componentes del riesgo sistémico.

Al haber una gran deficiencia en la información, una de las herramientas más utilizadas por los traders en la BVC es el Análisis Técni-

29 Fuente: página web www.nyse.com

30 Los autores de este trabajo son Ana Maria Fierro Sánchez y Andrés Eduardo Palacios Poveda, egresados de la Universidad Javeriana.

31 Una burbuja especulativa se presenta cuando el precio de una acción se aleja por razones ajenas al propio desempeño de la firma de su valor fundamental, que es determinado por el flujo de dividendos traídos a valor presente.

co, ya que permite pronosticar el precio de los activos sin la necesidad de estar sujeto a un modelo de mercado como el CAPM o el APT (Análisis Fundamental). Sin embargo ambos análisis son importantes para explicar el comportamiento de los precios de activos riesgosos, y en Colombia se evidencia un gran atraso en el Análisis Fundamental ya sea por la carencia de información o por imperfecciones del mercado que no permiten la estimación de modelos de mercado.

Con toda la evidencia empírica anterior no se puede rechazar concluyentemente la hipótesis de la investigación[32], porque la falta de poder explicativo de los modelos utilizando el mercado accionario como muestra se debe a fallas propias del mercado, es decir, es evidente que al cambiar los factores que determinan el riesgo y describen el comportamiento de los retornos esperados los resultados serán diferentes, el problema que se presentó es que los datos y el mismo ambiente de inversión no son un factor a favor para implementar este tipo de análisis.

Adicionalmente el resultado esperado no fue el efectivamente encontrado, en el resultado esperado se pretendía que el modelo CAPM continuo sería el mejor modelo para el mercado de capitales, sin embargo no fue así, no por el hecho de haber encontrado uno mejor sino porque este tipo de modelos, cuya base fundamental es el supuesto de eficiencia en la información, no encuentra aplicabilidad en la BVC.

Habiendo identificado los problemas del mercado accionario colombiano, existen metodologías y modelos que permiten solucionar las deficiencias encontradas por la investigación. Se puede realizar la estimación del CAPM a través de Mínimos Cuadrado Generalizados, ya que toma en cuenta la autocorrelación presente en el término de perturbación estocástica lo que ayudaría a modelar la asimetría e ineficiencia con respecto a la información en el mercado accionario Colombiano, para el caso del CAPM continuo se pueden utilizar los modelos GARCH, ARCH y GARCH en la medida que permiten modelar de una manera dinámica el cambio en el conjunto de oportunidades de inversión futura.

Finalmente, es de resaltar la gran dificultad de la consecución de la información y la consolidación de las cifras del mercado de capitales en Colombia, lo que origino una labor muy dispendiosa en la construcción de la base de datos utilizada en la investigación.

10. BIBLIOGRAFÍA

Bremann, Michael, Ashley Huang and Yihong Xia. "Estimation and Test of a simple Model of intertemporal CAPM" *Finances California University*, 2003.

Hirshleifer, J., "Investment Decision under Uncertainty: Applications of the State-Preference Approach", *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 80, No. 2, 1966. Pp. 252-277.

Levy, Haim, "Equilibrium in an Imperfect Market: A Constrain in number of Securities in the Portfolio", *The American Review*, Vol.68, No. 4, 1980. pp 643-658.

Levy, Haim and Markowitz, Harry. "Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance", *The American Review*, Vol.69, No. 3,1979. pp 308-317.

Lintner, John. "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 47, No. 1,1965. pp 13-37.

Lucas, Robert. "Asset Prices in an Exchange Economy". *Econometrica*,1978.

Mass-Colell, Andrew, Whiston, Michael and Green Jerry. *Microeconomics Theory*. London: Oxford University. 1995.

Markowitz, Harry. "Portfolio Selection". *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, 1952. pp 77-91.

Markowitz, Harry, "Foundations of Portfolio Theory", Nobel Lecture. 1990.

Merton, Robert C. "An Analytic Derivation of Efficient Frontier". *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 7, No. 4, 1972. pp 1851-1872.

32 En la cual se establece que los cambios en la estructura de mercado y el manejo del tiempo dentro de los modelos cambian significativamente el comportamiento de los inversionistas al igual que los resultados.

Merton, Robert C., "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model". *Econometrica*, Vol. 41, No.5,1973. pp 867-887.

Mossin, Jan. "Equilibrium in a Capital Asset Market". *Econometrica*, Vol. 34, No. 4, 1966. pp 768-783.

Roll, Richard. Ross, Stephen, "An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory". *The Journal Of Finance*, Vol. 35, No. 5, 1980. pp 1073-1103.

Sarmiento Lotero Rafael y Vélez Molano, Rodrigo. "Teoría del riesgo en Mercados Financieros". *Cuadernos Latinoamericanos de Administración*, Universidad del Bosque, Bogotá: Scripto, 2007.

Sarmiento Lotero Rafael y Salazar, Mauricio. "La estructura de capital en Colombia: una evidencia empírica para Colombia con un modelo econométrico, 1998-2005", *Cuadernos de Economía,* Universidad Javeriana, Bogotá, 2006.

Sharpe, William F., "Capital Assets with and without Negative Holdings". Nobel Lecture. 1990.

Sharpe, William F., "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", *The Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3, 1964. pp 425-442.

Smith, P.N, Sorensen, S. and Wicknes, M.R. "The Asymmetric effect of the business cycles on the relation between Stock Market returns and Volatility". Working paper. Centre of applied for macroeconomic analysis. The Australian National University. 2006.

Von Neuman, J. and Morgensten O. *The Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton, N. S.: Princeton University Press. 1944.

11. APENDICE

En este Apéndice se muestran las características de los Movimientos Brownianos, los cuales son la base para la construcción de Lema de Itô. Estas características son las siguientes:

1) Sea $f(t)$ una función continua y diferenciable donde t es la variable tiempo y se encuentra en el intervalo $[0,T]$. Este intervalo se puede dividir por puntos que se encuentren una misma distancia, de la forma $t=0,t_1,t_2,...,t_N$ y el cambio de un punto a otro está determinado por $\Delta t=t_{k+1}-t_k$ con $k=1,2,,...,N-1$.

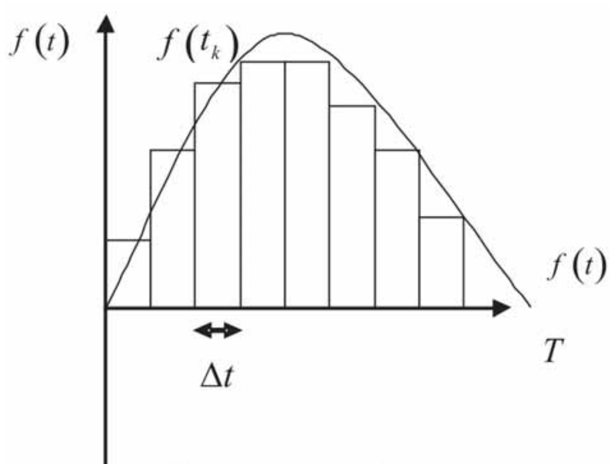

Gráfico A1. Aproximación Sumas de Riemann

La multiplicación de Δt con $f(t_k)$da como resultado de cada uno de los rectángulos en el Gráfico A1, y la suma del área de todos los rectángulos se aproxima al área debajo de la curva $f(t)$, por tanto la suma de Reimann se define como:

$$f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + ... + f(t_N)\Delta t = \sum_{k=1}^{N} f(t_k)\Delta t \quad \text{(A.1)}$$

Cuando se toma el límite a la expresión (A.1) cuando $\Delta t \to 0$, graficamente los rectángulos se hacen cada vez más pequeños de tal manera que el área calculada es muy cercana a la verdadera área debajo de $f(t)$, el anterior concepto se conoce como la integral de Reimann y se expresa de la forma:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta t \sum_{k} f'^{2}_{s} \Delta t = \lim_{\Delta t\to 0}\Delta t \int_0^T f'(t)^2\, dt \quad \text{(A.2)}$$

2) Además,

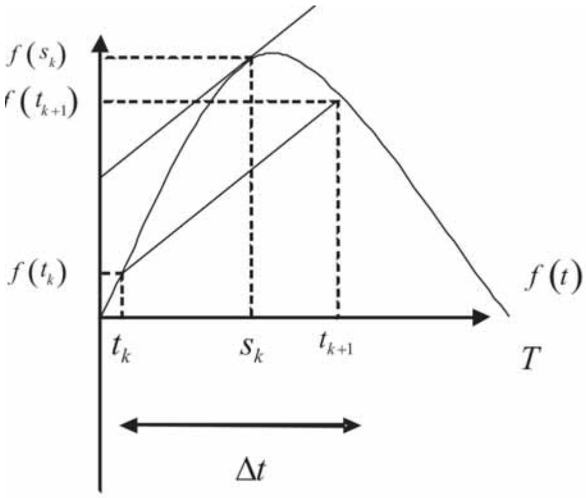

Gráfico A2. Tangencia en un Punto.

La tangencia o la derivada en un punto es igual la tangente entre Δt y $f(t_{k+1})-f(t_k)$. Para el caso del Gráfico A2, la derivada de $f(t)$ en un punto S_k es igual a:

$$f s'(\ _k) = \frac{f(t_{k+1})-f(t_k)}{\Delta t}$$

Organizando términos

$$f(t_{k+1})-f(t_k) = f'(s_k)\Delta t \qquad \text{(A.3)}$$

3) La suma al cuadrado de $f(t_{k+1})$-$f(t_k)$ se conoce como la Variación Cuadrática de $f(t)$ en el intervalo $[0,T]$, y se expresa[33]:

$$\sum_k [f_{k+1}-f_k]^2 = [f_1-f_0]^2+[f_2-f_1]^2+....+[f_N-f_{N-1}]^2 \qquad \text{(A.4)}$$

Ahora, sí se suma sobre k a ambos lados de (A.3) y se eleva al cuadrado, se obtiene una expresión para la Variación Cuadrática

$$\sum_k [f_{k+1}-f_k]^2 = \Delta t \sum_k f'^2_s \Delta t \qquad \text{(A.5)}$$

Tomando el límite de (A.5) cuando $\Delta t \to 0$ y por (A.2) se tiene

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta t \sum_k f'^2_s \Delta t = \lim_{\Delta t\to 0}\Delta t \int_0^T f'(t)^2\, dt \qquad \text{(A.6)}$$

Resolviendo, (A.6) converge a cero

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta t \int_0^T f'(t)^2\, dt = 0 \qquad \text{(A.7)}$$

Por (A.7) se tiene que para funciones continuas y diferenciables la Variación Cuadrática es cero.

Sin embargo, un Movimiento Browniano (MB) es continuo pero no diferenciable, esto se debe a que la función no es "suave", es decir, presenta cambios muy bruscos, por lo tanto su Variación Cuadrática (VC) no será cero.

Teniendo en cuenta esta característica anterior los MB tienen las siguientes propiedades:

Sea $f(t)$ un MB, entonces

a) $f(t)$ es una función continua de t sí $t=t_1,...,t_N$, son puntos en el tiempo en $[0,T]$.

b) Todos los incrementos $f(t_{k+1})$-$f(t_k)$ son independientes y se distribuyen normal. El MB no tiene memoria, esto quiere decir que el pasado del MB no puede ser utilizado para predecir su futuro.

c) $E[f_{k+1}-f_k] = E[\Delta f_s] = 0$.

d) $E\left[(\Delta f_k)^2\right] = t_{k+1}-t_k$.

Cuando se haga referencia a (A.8) se está haciendo referencia al conjunto de estas cuatro propiedades.

4) Variación Cuadrática de un MB

Por propiedades de las sumatorias la expresión (A.4) se puede expandir de la forma:

$$\sum_k [f_{k+1}-f_k]^2 = \sum_k \left[f_{k+1}^2 - 2f_{k+1}f_k + f_k^2\right] \qquad \text{(A.9)}$$

El primer término de la sumatoria que se encuentra al lado derecho en la expresión (A.9) se puede escribir como:

$$f_1^2+f_2^2+.....+f_N^2 = f_N^2 - f_0^2 + \sum_k f_k^2 \qquad \text{(A.10)}$$

Reemplazando (A.10) en (A.9)

$$\sum_k \Delta f_k^2 = f_N^2 - f_0^2 + \sum_k \left[f_k^2 - 2f_{k+1}f_k + f_k^2\right]$$
$$\sum_k \Delta f_k^2 = f_N^2 - f_0^2 + 2\sum_k [f_k - f_{k+1}] f_k$$

Despejando $\sum_k f_k [f_k - f_{k+1}]$

$$\sum_k f_k [f_k - f_{k+1}] = \sum_k f_k \Delta f_k = \frac{1}{2}[f_N - f_0] - \frac{1}{2}\sum_k \Delta f_k^2 \qquad \text{(A.11)}$$

33 Para simplicidad se abrevia la notación de la siguiente forma: $f(t_k)=f_k$.

Al tomar el límite de $\Delta t \to 0$ de (A.11) se tiene que: primero por (A.2)

$$\lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_k f_k \Delta f_k = \int_0^T f(t) df(t) \qquad \text{(A.12)}$$

Y segundo, los incrementos Δf_k en el MB al tomar el límite de $\Delta t \to 0$, habrán tantos incrementos como puntos en el tiempo, es decir, la Variación Cuadrática del MB es:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_k \Delta f_k^2 = T \qquad \text{(A.13)}$$

Por lo tanto reemplazando (A.12) y (A.13) en (A.11), sí $f(t)$ es un MB sobre $[0,T]$ entonces:

$$\int_0^T f(t) df(t) = \frac{1}{2}\left[f_N^2 - f_0^2 \right] - \frac{T}{2} \qquad \text{(A.14)}$$

5) Ya se consideró la suma de cuadrados de Δf_k (VC) de un MB, ahora se va considera el cuadrado de la suma que se expresa como:

$$\left[\sum_k (f_{k+1} - f_k) \right]^2 = \left[\sum_k \Delta f_k \right]^2 \qquad \text{(A.15)}$$

Expandiendo (A.15) por propiedades de las sumatorias, se encontrarán los cuadrados de todos los Δf_k junto con todos los términos cruzados posibles que aparecerán dos veces, de la siguiente de la forma:

$$\left[\sum_k (f_{k+1} - f_k) \right]^2 = \sum_k \Delta f_k^2 + 2 \sum_k \Delta f_k \Delta f_j \qquad \text{(A.16)}$$

Sin embargo, el término $\sum_k (f_{k+1} - f_k)$ se puede reescribir como:

$$\sum_k (f_{k+1} - f_k) = (f_2 - f_1) + (f_3 - f_2) + \ldots.. + (f_N - f_{N-1})$$

Cancelando términos

$$\sum_k (f_{k+1} - f_k) = f_N - f_0 \qquad \text{(A.17)}$$

Reemplazando (A.17) en (A.16)

$$(f_N - f_0)^2 = \sum_k \Delta f_k^2 + 2 \sum_k \Delta f_k \Delta f_j \qquad \text{(A.18)}$$

Tomando el límite de (A.18) cuando $\Delta t \to 0$

$$\lim_{\Delta t \to 0} (f_N - f_0)^2 = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_k \Delta f_k^2 + 2 \lim_{\Delta t \to 0} \sum_k \Delta f_k \Delta f_j \qquad \text{(A.19)}$$

Por la expresión (A.13) el primer término de la derecha de (A.19) es igual a T y por la propiedad b) -incrementos independientes- de (A.8) el segundo término es igual a cero, por lo tanto (A.19) es igual a:

$$\lim_{\Delta t \to 0} (f_N - f_0)^2 = T \qquad \text{(A.20)}$$

Ahora, la distancia que el MB ha recorrido esta determinada por f_N - f_0, entonces por (A.20) la distancia recorrida del MB es igual a la raíz cuadrada del tiempo.

Adicionalmente sí se escribe (A.13) como:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_k \Delta f_k^2 = \int_0^T df df = T = \int_0^T dt \qquad \text{(A.21)}$$

Entonces a un nivel diferencial -por (A.21)- se concluye que sí $f(t)$ es un MB sobre $[0,T]$ entonces:

$$df^2 = dt \qquad \text{(A.22)}$$

6) Sea $f(t)$ una función de f, utilizando la aproximación de Taylor de segundo orden se tiene que:

$$P(f + \Delta f) = P(f) + \Delta f P'(f) + \frac{\Delta f^2}{2} P''(f) \qquad \text{(A.23)}$$

Despejando el incremento ΔP de (A.23)

$$\Delta P = P(f + \Delta f) - P(f) = \Delta f P'(f) + \frac{\Delta f^2}{2} P''(f) \qquad \text{(A.24)}$$

Dividiendo (A.24) por Δt y tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$, entonces

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} P'(f) + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f^2}{\Delta t} \frac{P''(f)}{2} \qquad \text{(A.25)}$$

Donde por (A.15) df^2/dt=1. Multiplicando (A.25) por dt, se tiene:

$$dP = P'(f) df + \frac{1}{2} P''(f) dt \qquad \text{(A.26)}$$

La expresión (A.26) es la Regla de la Cadena que derivo Itô para el cálculo estocástico.

Habiendo descrito estas 6 características de los MB más la Regla de la Cadena (A.26) se puede explicar la formalización que hizo Itô del trabajo de Bachelier bajo el nombre del Lema de Itô.

5. CONCLUSIONES

A partir del campo netamente teórico el CAPM de Merton ofrece una mejor visión de cómo los inversionistas se comportan en un mercado financiero gracias a que amplia el espectro del CAPM clásico al considerar un conjunto de oportunidades de inversión cambiante en el tiempo y así permitir que los inversionistas tomen decisiones de consumo de activos financieros hoy con base en las expectativas sobre el futuro del mercado financiero.

6. BIBLIOGRAFIA

Fama E. F., "Efficient capital markets: A review of theory and empirical work", *Journal of Finance*. 1970.

Fama E. F., *Foundations of Finance*, New York: Basic Books. 1976.

Levy, Haim, "Equilibrium in an Imperfect Market: A Constrain in number of Securities in the Portfolio", *The American Review*, Vol.68, No. 4, 1980. pp 643-658.

Levy, Haim and Markowitz, Harry, "Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance", *The American Review*, Vol.69, No. 3, 1979. pp 308-317.

Lintner, John, "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 47, No. 1, 1965. pp 13-37.

Lucas, Robert, "Asset Prices in an Exchange Economy". *The Journal of Finance*.1978.

Markowitz, Harry, "Portfolio Selection", *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, 1952. pp 77-91.

Markowitz, Harry, "Foundations of Portfolio Theory", *Nobel Lecture*. 1990.

Merton, Robert C., "An Analytic Derivation of Efficient Frontier". *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 7, No. 4, 1972. pp 1851-1872.

Merton, Robert C., "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model", *Econometrica*, Vol. 41, No.5, 1973. pp 867-887.

Mossin, Jan, "Equilibrium in a Capital Asset Market", *Econometrica*, Vol. 34, No. 4, 1966. pp 768-783.

Sharpe, William F., "Capital Assets with and without Negative Holdings". *Nobel Lecture*.1990.

Sharpe, William F., "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", *The Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3, 1964. pp 425-442.