

Artículo de investigación



Aplicación del modelo varianza covarianza de diciembre de 2015 a diciembre 2020 para los mercados de México y Colombia

Application of the variance-covariance model from December 2015 to December 2020 for the markets of Mexico and Colombia

Yolanda Rocío Vargas Leguizamón¹, Nydia Consuelo Hernández Mora², Ronald Mauricio Martínez Contreras³ y Hernando Espitia López⁴

Clasificación JEL: **E62, F37**

Recibido: **10/11/21** Aprobado: **06/09/22**

1. Máster en Dirección y Asesoramiento Financiero por la Universidad Internacional de la Rioja, UNIR. Profesora Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano. Colombia. <https://orcid.org/0000-0003-2081-8312y>; vargasl@poligran.edu.co

2. Máster en Dirección y Asesoramiento Financiero por la Universidad Internacional de la Rioja, UNIR. Profesora Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano. Colombia. <https://orcid.org/0000-0003-3051-4734>; nhernand@poligran.edu.co

3. Magister en Administración Financiera. Profesor Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano. Colombia. <https://orcid.org/0000-0001-8233-911X> romartin@poligran.edu.co

4. Magister en Dirección Financiera por la Universidad Metropolitana de Educación Ciencia y Tecnología, Panamá. Magister en Relaciones y Negocios Internacionales por la Universidad Militar Nueva Granada. Bogotá. Profesor Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano <https://orcid.org/0000-0002-6729-1549>; hespitia@poligran.edu.co

Como citar este artículo

Vargas, Y.R., Hernández, N.C, Martínez, R.M., y Espitia, H. (2022). Aplicación del modelo varianza covarianza de diciembre de 2015 a diciembre 2020 para los mercados de México y Colombia. *Cuadernos Latinoamericanos de Administración*. 18(35). <https://doi.org/10.18270/cuaderlam.v18i35.3692>

Resumen. Este análisis está basado en la teoría de selección de portafolio óptimo, donde se espera que para una rentabilidad determinada dentro de la curva de portafolios eficientes se genere el mínimo nivel de riesgo. En esta investigación se realizó un análisis empírico, en el que se conformó el portafolio eficiente según la teoría de selección de portafolio de Markowitz para los años 2015 a 2020 en los mercados accionarios de México y Colombia, revisando la rentabilidad arrojada para cada año de acuerdo con la composición inicial del portafolio al final del 2015, tomando el punto en la frontera eficiente donde el valor en riesgo (VaR), era igual al VaR del índice COLCAP en el caso de Colombia y al VaR del indicador INMEX en el caso de México. La rentabilidad calculada del portafolio se comparó con la rentabilidad del respectivo índice para validar la teoría en la cual un portafolio eficiente debería ser más rentable que uno no eficiente con el mismo valor en riesgo. El resultado principal es que para el horizonte temporal de cinco años si resultan más rentables los portafolios creados tanto para el mercado accionario de México como para el mercado accionario de Colombia.

Palabras Clave: Teoría Markowitz, Cartera eficiente, portafolio eficiente, VaR

Abstract. This analysis is based on the optimal portfolio selection theory, where it is expected that for a given return within the efficient portfolio curve, the minimum level of risk is generated. In this research an empirical analysis was performed, in which the efficient portfolio was formed according to Markowitz's portfolio selection theory for the years between 2015 and 2020 for the Mexican and Colombian stock markets, reviewing the profitability for each year according to the initial composition of the portfolio at the end of 2015, taking the point on the efficient frontier where the value at risk (VaR) was equal to the VaR of the COLCAP index in the case of Colombia and to the VaR of the INMEX indicator in the case of Mexico. The calculated portfolio return was compared with the return of the respective index to validate the theory that an efficient portfolio should be more profitable than a non-efficient one with the same value at risk. The main result is that for the five-year time horizon, the portfolios created for both the Mexican and Colombian stock markets are more profitable.

Keywords. Markowitz model, efficient portfolios, Value at Risk (VaR), Mexican Stock Exchange (BMV), Colombian Stock Exchange (BVC), Profitability.

Introducción

La selección de carteras ha sido un tema de interés por parte de los inversionistas en relación con el propósito de maximizar retornos y disminuir riesgos. El presente trabajo se enfoca en la medición de la rentabilidad de un portafolio eficiente conformado bajo el modelo de Markowitz durante 2015 a 2020, para el mercado accionario colombiano y mexicano, con respecto a los índices de referencia de estos mercados, bajo la condición de que el portafolio y el índice de referencia tienen el mismo nivel de riesgo medido mediante el VaR.

La hipótesis planteada es que la frontera eficiente de probabilidades de inversión según el modelo de Markowitz con unos activos financieros previamente elegidos (Xidomas, 2017) permite, en efecto, construir portafolios de inversión más eficientes que los índices de referencia de los mercados analizados y, de este modo, demostrar la vigencia del modelo en la actualidad. La razón por la cual se seleccionan los mercados de Colombia y México es para validar el modelo en mercados accionarios que, a pesar de ser de la misma región, tienen tamaños radicalmente diferentes y, por lo tanto, niveles de eficiencia distintos.

Para ello, se calculó el valor en riesgo de los índices de referencia COLCAP e INMEX, respectivamente, para cada año desde 2015 hasta 2020 y, a partir del resultado obtenido, se construyeron los portafolios eficientes correspondientes al VaR identificado para los índices de referencia, de tal modo, que cada año se hizo un rebalanceo de portafolio en función de igualar el valor en riesgo de los índices de referencia. Luego se hizo un comparativo del rendimiento de los portafolios eficientes con respecto al rendimiento de los índices para determinar si, en efecto, de acuerdo con la teoría de portafolios eficientes, tenían un mejor comportamiento que los índices de referencia.

A lo largo de los años se han presentado diferentes teorías relacionadas con el análisis de la rentabilidad y el riesgo con el propósito de hallar el portafolio de inversión óptimo (Tarczyński, 2018). En 1952, Harry Markowitz expone la importancia de medir no solo la rentabilidad, sino el riesgo que supone una inversión (Markowitz, 1952). El modelo, además, determina cuál es la mejor combinación de estos activos para cada inversor, entendiendo que una cartera está compuesta por activos financieros (Climent-Serrano, 2020). Finalmente, la selección de carteras eficientes trata de maximizar el rendimiento esperado y reducir el riesgo global de la cartera (Shadabfar, 2020).

El modelo de Markowitz han sido tomado por los investigadores como base de prueba dentro del análisis o lo han incluido como punto comparativo. Un ejemplo integrando el modelo tradicional de varianza media convencional (MVM) de Markowitz, combinado con un modelo de entropía adaptativa (AEM) indica que este último tiende a descentralizar las inversiones y, por lo tanto, ayuda a neutralizar los riesgos no sistemáticos (Song y Chan, 2020). En este mismo sentido un modelo de asignación de activos modernos versus tradicionales; muestra que el capital emergente en mercados imperfectos representa un desafío para los modelos existentes, sin embargo, se pueden aplicar utilizando algunas características adicionales (Janjusevic, 2019).

Dentro de las aplicaciones del modelo, se encuentra una evaluación del atractivo de inversión de ciertos tipos de productos en el campo de la producción de materiales de construcción (Gercekevich, 2020). Por otro lado, un estudio de la aplicación de las leyes fundamentales sobre los precios de la bolsa de valores de París relaciona la ley espectral de las matrices aleatorias desarrollada por Wigner y Wishart, con la distribución empírica de los autovalores resultantes de la minimización de la matriz de covarianza (teoría de Markowitz) (Chakir, 2020). En este mismo sentido, un análisis sobre la relación entre la inversión extranjera en cartera y el mercado de valores de Brasil, en el cual se utiliza el modelo de Markowitz para crear una cartera con riesgo mínimo y rentabilidad esperada (Gomes, 2020).

Un estudio en el cual se experimenta cómo el análisis de Markowitz sigue siendo de utilidad, indica que existe actitud en cuatro vías hacia el riesgo y puede capturar diferentes combinaciones de actitudes de riesgo y preferencias de orden superior (Georgalos, 2021). El Modelo de Markowitz, ha generado un marco conceptual dentro de las opciones de manejo eficaz de portafolios, como es el caso de un estudio que propone una estrategia para predecir la evolución de precios e índices en el mercado de capitales rumano (Fat, 2020). En la misma medida, La construcción de una cartera especializada en el mercado inmobiliario hotelero italiano logro identificar los mejores criterios de diversificación (Giannotti , Mattarocci , & Spinelli, 2011) No obstante, el modelo presenta supuestos asumidos como las correlaciones simétricas y constantes, el estudio presenta una opción con correlaciones asimétricas variables en el tiempo (Gupta, 2017). Por otro lado, la teoría asume que los rendimientos de los activos se distribuyen normalmente. Sin embargo, es necesario tener en cuenta momentos de turbulencias financieras, cuando las correlaciones entre las clases de activos aumentan y los activos pierden valor más de lo esperado por la distribución normal (Berk, 2021).

El objetivo de este apartado es calcular la frontera eficiente del modelo y mostrar con exactitud algunas de las diferentes carteras que la forman para demostrar el efecto de una diversificación eficiente y poder comparar con los resultados que ofrecen una serie de índices generales.

De acuerdo con lo anterior se aplica el modelo de Markowitz debido a que si bien es cierto, que en periodos de alta volatilidad de acuerdo a diversos autores el modelo pierde validez, los periodos de alta volatilidad por lo general son de corto plazo, por ejemplo, durante el inicio de la crisis generada por el covid-19 se ha dado el periodo de mayor volatilidad del mercado accionario colombiano (Álvarez, 2021), sin embargo, este no tuvo una duración mayor a tres meses, por lo tanto, se pretende demostrar que, en el largo plazo, el modelo de Markowitz sí es eficiente al momento de construir portafolios de inversión.

El artículo está dividido en cuatro secciones: una corresponde a la revisión del modelo matemático, amparados en la literatura; otra en la aplicación de la metodología propuesta en los mercados accionarios de Colombia y México. Posteriormente, se desarrolla el análisis de los resultados. Finalmente, se abordan la discusión y las conclusiones en las cuales se contrastan los resultados encontrados con respecto a la hipótesis planteada y a la revisión de literatura realizada.

El modelo de selección de portafolio óptimo

La selección de portafolio según Markowitz (1952), parte de la hipótesis de que el inversor debe desear el rendimiento y rechazar la variación del rendimiento. Principalmente, Markowitz basa su teoría en la diversificación del portafolio, teniendo en cuenta la relación entre rendimiento y riesgo.

El riesgo se mide mediante el valor en riesgo (VaR) que se obtiene de la desviación estándar de los rendimientos del portafolio que surge a partir del cálculo de la varianza conjunta de los activos que lo componen.

Es así como el rendimiento es una variable aleatoria debido a que no se tiene certeza de su comportamiento en periodos posteriores, en el ejercicio se debe considerar el riesgo de los activos en la misma medida. Por lo tanto, se usa una distribución de probabilidades para hacer la estimación del rendimiento y riesgo de los activos. (Medina, 2003).

Maximización del Rendimiento

$$\text{Max } E(Rp) = \sum_{i=1}^n W_i * E(R_i)$$

Minimización del Riesgo

$$\text{Min } \sigma^2(Rp) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i * W_j * \sigma_{ij}$$

Para cada activo se debe o bien maximizar el rendimiento o minimizar el riesgo, por lo tanto, se usa la siguiente aplicación (Markowitz, 1959):

El modelo parte de varios supuestos que son:

- Los rendimientos del portafolio tienden a comportarse estadísticamente mediante una distribución normal
- La distribución del portafolio contempla solo operaciones de compra, es decir, no existen operaciones en corto dentro del portafolio de inversión
- La totalidad del portafolio de inversión es invertida en activos de riesgo, es decir, no existen excedentes en efectivo dentro del portafolio de inversión

Una vez se conozca el máximo rendimiento esperado y el mínimo riesgo del activo, se debe tener en cuenta la relación entre los rendimientos de los activos, por lo cual se utiliza la covarianza. Para los activos A y B se determina con la siguiente fórmula:

$$\sigma_{AB} = E [(r_A - \bar{r}_A)(r_B - \bar{r}_B)] = E(r_A r_B) - E(r_A) E(r_B)$$

Para determinar el coeficiente de relación (ρ) de los retornos para los activos A y B se aplica la siguiente fórmula:

$$\rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B}$$

Este coeficiente se mueve en un rango entre -1 y +1, cuando el coeficiente es -1 significa una correlación negativa perfecta, por otra parte, un coeficiente de +1 significa una perfecta relación lineal positiva entre los retornos de los activos A y B.

Teniendo en cuenta el modelo matemático de la teoría de Markowitz, promulga que la media y la varianza de los resultados futuros, en el que se calcula el mejor conjunto de resultados, generando una frontera eficiente, donde a partir de un nivel de riesgo se maximizan los rendimientos o se minimiza el riesgo a partir de un nivel de rendimiento esperado (Gültekin, Shohfi y Guerard, 2020)

Materiales y Métodos

Cuando un inversionista decide acudir a la teoría de Markowitz para tomar decisiones de inversión, espera que el portafolio elegido según un nivel de riesgo deseado ofrezca un mayor rendimiento que el mercado en el que se está invirtiendo. En este estudio se analizan los mercados de Colombia y México entre 2015 y 2020, usando el método de análisis empírico en el que se toma el portafolio eficiente para el mismo nivel de riesgo de un indicador bursátil de cada país, para el caso de Colombia se trabajó con el índice COLCAP y para México con INMEX, con el fin de determinar en qué periodos se cumple un mayor rendimiento del portafolio eficiente sobre el rendimiento del índice. En el cálculo del portafolio eficiente se usó la herramienta *Economática* que, desde 1986, ofrece al mercado latinoamericano información financiera, a través de bases de datos y herramientas de análisis.

Índices Bursátiles Colombia y México

COLCAP es un índice de la Bolsa de Valores de Colombia (BVC), en este indicador se agrupan las 20 acciones con mayor liquidez en el mercado bursátil de Colombia y muestra la variación de los precios de este conjunto de acciones. El valor de capitalización de mercado indica la participación de cada activo. El indicador inicia el 15 de enero de 2008 con un valor inicial de 1000 puntos (Bolsa de Valores de Colombia, 2020).

INMEX es un índice de la Bolsa Mexicana de Valores, que agrupa entre 20 y 25 acciones que son las de mayor bursatilidad y el valor de mercado debe estar por encima de \$100 millones de dólares. La muestra es revisada cada 6 meses (Bolsa Mexicana de Valores, 2020).

En la construcción del portafolio eficiente para los dos países se tomaron las acciones activas en cada periodo con presencia igual o superior al 90%, la presencia en bolsa (PB) la herramienta *Economática* la calcula de la siguiente manera $PB = 100 * p/P$, donde p es el número de días en que hubo por los menos un negocio en el periodo elegido (para este estudio se toma un histórico de 36 meses), dividido el número total de días del periodo escogido. Además, se considera la fecha de última cotización de las acciones resultantes de este primer criterio de selección con el fin de identificar si alguna acción ha dejado de cotizar en una fecha específica, y hacer un rebalanceo del portafolio para ese momento. Vale la pena resaltar que los precios de las acciones que se extraen de *Economática*, son precios con dividendo, es decir que incorporan también la porción de las utilidades que es repartida a los accionistas a lo largo de cada año.

Dado lo anterior se llevan las acciones resultantes al optimizador de carteras de la herramienta *Economática*. La optimización se calcula con los retornos históricos de 36 meses tomados diariamente. Es decir que, por ejemplo, para el portafolio de 2016 se toman los retornos históricos desde 2013 hasta 2015 y se trabaja con un VaR con un nivel de confianza del 95%.

De la frontera eficiente se elige cada año el portafolio con el VaR más cercano la obtenido por los índices de referencia utilizados para cada mercado que son el índice COLCAP para el mercado colombiano y el INMEX para el mercado mexicano, y los portafolios se rebalancean cada año en función del valor en riesgo. En caso de que el VaR del portafolio fuera superior a los arrojados en la frontera eficiente, se tomó el valor más alto de la misma.

Al realizar la optimización para los periodos de 2015 a 2020 con corte a 31 de diciembre, en el periodo inicial se toma una inversión de \$10.000 dólares que se convierten a la moneda de cada país, teniendo la inversión inicial en pesos colombianos y mexicanos correspondientemente. Periodo a periodo se calcula el número de acciones de acuerdo con la participación de cada activo en el portafolio, y se calcula el valor del portafolio al final de cada periodo, tanto en pesos (colombianos y mexicanos) como en dólares según los precios de cierre a 31 de diciembre del siguiente año.

Una vez hecho esto se determina la rentabilidad anual del portafolio y la rentabilidad anual de índice, en pesos de cada país y en dólares también se calcula la rentabilidad para el periodo analizado (2015-2020) y la rentabilidad anual promedio del periodo.

Adicionalmente, la validación de la relación rentabilidad vs. riesgo para cada portafolio se realiza mediante el índice Sharpe, en el cual se utiliza como referente de tasa libre de riesgo, la tasa de los bonos del tesoro americano, extraída de la página del profesor Damodaran (tabla 1).

Tabla 1. Tasa libre de riesgo 2015-2020

	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Tasa Libre de Riesgo	1,28%	0.69%	2.80%	-0.02%	9.64%	11.33%

Fuente: elaboración propia.

El propósito final de este ejercicio es tratar de demostrar que los portafolios eficientes construidos bajo el modelo de varianza-covarianza tienen un mejor comportamiento a nivel de relación rentabilidad riesgo que los índices de referencia de cada país. Esto bajo la premisa de que un índice bursátil si bien refleja el comportamiento de un mercado, no lo refleja de forma eficiente, esto debido a que, los pesos que tiene cada activo dentro de un índice de referencia no están en función de la eficiencia, sino en función de su importancia relativa dentro del mercado accionario en el que participa.

Datos para Colombia

Para conformar el portafolio se toma como punto de partida el valor del índice COLCAP, en pesos colombianos y el valor en riesgo para cada periodo; datos que se muestran en la tabla 2.

Tabla 2. Valores del índice COLCAP para Colombia y VaR 2015-2020

Periodo	2015	2016	2017	2018	2019	2020
COLCAP	1,153.71	1351.68	1513.65	1325.93	1662.42	1437.89
Rentabilidad COLCAP		17.16%	11.98%	-12.40%	25.38%	-13.51%
VaR%	24.63%	25.23%	22.63%	19.47%	18.60%	38.67%
Indice Sharp		0.65	0.41	-0.64	0.85	-0.64

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con los métodos explicados en la tabla 3 se relaciona los portafolios eficientes generados por la herramienta para cada periodo, empezando el 31 de diciembre de 2015, donde se simula una inversión inicial de \$10.000 dólares que en pesos colombianos es de \$31.695.000. Se calcula el valor de este portafolio con los precios de cierre a 31 de diciembre del siguiente año, así para 31 de diciembre de 2016 se alcanzó un valor de \$33.736.002 pesos y en dólares \$ 11.239,71 de acuerdo con la tasa de cambio a diciembre de 2016.

Tabla 3. Portafolio eficiente Colombia a 31 de diciembre 2015

Activo	Cierre 31Dic15	Cierre 31Dic16	Peso%	# Acciones (base 2015)	Valor portafolio 31Dic15	Valor portafolio 31Dic16
Grupo Energía de Bogotá	1.308,45	1.436,30	52,20%	12.644,59	16.544.790,00	18.161.377,83
ISAGEN S.A. ESP	3.400,00	3.590,00	22,00%	2.050,85	6.972.900,00	7.362.562,06
Corporación Financiera Colombiana S.A.	30.785,11	29.796,96	16,10%	165,76	5.102.895,00	4.939.100,28
Banco de Bogotá	45.643,75	48.591,44	9,70%	67,36	3.074.415,00	3.272.961,95
Total					31.695.000,00	33.736.002,11

Fuente: elaboración propia.

El portafolio a diciembre de 2015 se concentró en los sectores de energía eléctrica 74,3% y finanzas y seguros 25,7%.

Con el capital obtenido de \$33.736.002,11 a diciembre 31 de 2016, correspondiente a 11,239,21 dólares, se distribuye en el portafolio rebalanceado para 31 diciembre de 2016 a 31 de diciembre de 2017, de acuerdo con los activos, observamos su participación para este periodo en la tabla 4.

Tabla 4.Portafolio eficiente Colombia a 31 de diciembre 2016

Activo	Cierre 31Dic16	Cierre 31Dic17	Peso%	# Acciones (base 2016)	Valor portafolio 31Dic16	Valor portafolio 31Dic17
Grupo Energía de Bogotá	1.436,30	1.681,48	0,40	9.371,79	13.460.664,84	15.758.501,87
Banco Davivienda	26.774,77	27.539,81	0,22	270,90	7.253.240,45	7.460.488,87
Bancolombia	21.627,98	26.555,06	0,19	294,81	6.376.104,40	7.828.647,83
Cementos Argos	10.321,15	10.229,85	0,08	248,42	2.563.936,16	2.541.253,52
Interconexión Eléctrica S.A.	8.765,35	12.837,01	0,05	207,83	1.821.744,11	2.667.977,04
Cementos Argos	9.302,92	8.837,92	0,05	174,07	1.619.328,10	1.538.387,53
Corporación Financiera Colombiana S.A.	29.796,96	23.798,49	0,02	21,51	640.984,04	511.946,59
Total					33.736.002,11	38.307.203,26

Fuente: elaboración propia.

Para 31 de diciembre de 2016 los sectores en los que está representada la inversión son energía eléctrica con 45,3% de participación, finanzas y seguros 42%, y minerales no metálicos con 12,5%.

El capital que se obtuvo a diciembre de 2017 fue de \$38.307.203,26 pesos (12.846,14 dólares), con el que se procedió a calcular la inversión para cada activo en el portafolio del siguiente periodo que se observa en la tabla 5, y comprende el periodo del 31 de diciembre de 2017 a 31 de diciembre 2018:

Tabla 5. Portafolio eficiente Colombia a 31 de diciembre 2017

Activo	Cierre 31Dic17	Cierre 31Dic18	Peso%	# Acciones (base 2017)	Valor portafolio 31Dic17	Valor portafolio 31Dic2018
Interconexión Eléctrica S.A.	12.837,01	13.160,70	38,90%	1.160,82	14.901.502	15.277.246,14
Grupo Energía de Bogotá	1.681,48	1.565,33	37,70%	8.588,74	14.441.816	13.444.171,93
Banco de Bogotá	57.151,14	49.631,06	13,40%	89,82	5.133.165	4.457.731,03
Bancolombia	26.555,06	27.814,88	10,00%	144,26	3.830.720	4.012.455,35
Total					38.307.203,26	37.191.604,46

Fuente: elaboración propia.

Para diciembre de 2017, el portafolio se concentra en energía eléctrica en 76,6% y en seguros y finanzas con 23,3% de participación en el total de portafolio. Obteniendo un capital de \$37.191.604,46 equivalente a \$12.846 dólares a precios de diciembre de 2017, que se distribuye en el portafolio rebalanceado para el periodo 31 de diciembre de 2018 a 31 de diciembre 2019 que se observa en la tabla 6.

Tabla 6. Portafolio eficiente Colombia a 31 de diciembre 2018

Activo	Cierre 31Dic18	Cierre 31Dic19	Peso%	# Acciones (base 2018)	Valor portafolio 31Dic2018	Valor portafolio 31Dic2019
Interconexión Eléctrica S.A.	13.160,70	19.001,49	0,33	938,22	12.347.612,68	17.827.556,25
Celsia S.A. ESP	3.551,64	4.083,69	0,17	1.738,30	6.173.806,34	7.098.677,80
Banco Davivienda	29.172,06	44.315,71	0,14	182,31	5.318.399,44	8.079.260,19
Grupo de Energía de Bogotá	1.565,33	2.087,77	0,14	3.231,31	5.058.058,21	6.746.224,49
Ecopetrol	2.162,17	3.009,00	0,11	1.840,52	3.979.501,68	5.538.113,40
Bancolombia Pref	28.788,86	43.081,83	0,08	96,89	2.789.370,33	4.174.224,76
Banco de Bogotá	49.631,06	79.799,06	0,04	30,72	1.524.855,78	2.451.732,16
Total			1,00		37.191.604,46	51.915.789,04

Fuente: elaboración propia.

En la tabla 7, se observa que a diciembre de 2019 se obtiene un capital de \$51.915.789,04, que según la tasa representativa del mercado colombiano a diciembre de 2019 fue de \$15.802,79 dólares. Se distribuye según el portafolio eficiente a esta fecha, obteniendo por el cierre de 2020 un capital de \$54.611.389,55 equivalente a \$15.993,96 dólares a diciembre de 2020.

Tabla 7. Portafolio eficiente Colombia a 31 de diciembre 2019

Activo	Cierre 31Dic19	Cierre 31Dic20	Peso%	# Acciones (base 2019)	Valor portafolio 31Dic19	Valor portafolio 31Dic20
Grupo Energía de Bogotá	2.087,77	2.650,00	27,40%	6.813,47	14.224.926,20	18.055.695,42
Interconexión Eléctrica S.A.	19.001,49	25.700,00	19,30%	527,31	10.019.747,28	13.551.963,42
Ecopetrol	3.009,00	2.245,00	16,70%	2.881,33	8.669.936,77	6.468.596,89
Banco Bogotá	79.799,06	74.984,65	12,20%	79,37	6.333.726,26	5.951.602,07
Banco Davivienda Pref	44.315,71	36.400,00	8,50%	99,58	4.412.842,07	3.624.616,67
Bancolombia Ord	41.359,67	34.980,00	7,90%	99,16	4.101.347,33	3.468.720,13
Bancolombia Pref	43.081,83	36.400,00	4,30%	51,82	2.232.378,93	1.886.145,22
Grupo Aval Ac va	1.371,38	1.145,19	3,70%	1400,69	1.920.884,19	1.604.049,72
Total					51.915.789,04	54.611.389,55

Fuente: elaboración propia.

A diciembre de 2019 el portafolio se distribuyó en los sectores de energía eléctrica 46,7%, finanzas y seguros 32,9%, petróleo y gas 16,7% y otros 3,6%.

Los datos finales de cada periodo de valor del portafolio se compararon tanto en pesos como en dólares, se halló la rentabilidad del índice y la rentabilidad del portafolio para cada uno de los periodos en la moneda de cada país y en dólares, con el fin de identificar si la teoría de se cumple el modelo de gestión de carteras de Markowitz y observar el efecto de la tasa de cambio en cada caso.

Resultados

Resultados Colombia

Para los periodos analizados entre el 31 de diciembre de 2015 y 31 de diciembre de 2020 se encuentra que la rentabilidad del portafolio es superior a la rentabilidad del índice entre 2017 y 2020, solamente para 2016 no se cumple la teoría. En 2018, que se genera rentabilidad negativa, se evidencia que la pérdida es menor para el portafolio tanto en pesos como en dólares, como se observa la tabla 8.

Tabla 8. Relación rentabilidad riesgo para los portafolios de inversión en pesos para el mercado colombiano

Periodo	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Portafolio	31,695,000.00	33,736,002.11	38,307,203.26	37,191,604.46	51,915,789.04	54,611,389.55
Rentabilidad Portafolio		6.44%	13.55%	-2.91%	39.59%	5.19%
VaR(95%)	24.63%	25.23%	22.63%	19.47%	18.60%	38.67%
Índice Sharp		0.23	0.48	-0.15	1.61	-0.16
COLCAP	1,153.71	1351.68	1513.65	1325.93	1662.42	1437.89
Rentabilidad COLCAP		17.16%	11.98%	-12.40%	25.38%	-13.51%
VaR(95%)	24.63%	25.23%	22.63%	19.47%	18.60%	38.67%
Índice Sharp		0.65	0.41	-0.64	0.85	-0.64

Fuente: elaboración propia.

Al observar el índice Sharpe, se encuentra que para todos los años del periodo analizado el riesgo anual medido mediante el VaR superó a la rentabilidad de cada año, aun así, la relación rentabilidad riesgo es mejor para los portafolios de inversión creados que para el índice COLCAP.

Como se observa en la tabla 9, al hacer la conversión del portafolio de inversión a dólares el rendimiento alcanzado por los portafolios eficientes construidos, estos logran una rentabilidad muy superior a la del índice COLCAP.

Tabla 9. Rentabilidad del portafolio y rentabilidad del índice en dólares para Colombia

Periodo	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2015-2020	Promedio Anual
Portafolio	10.000,00	11.239,71	12.846,14	11.461,20	15.802,79	15.993,96		
Rentabilidad Portafolio		12,40%	14,29%	-10,78%	37,88%	1,21%	59,94%	9,85%
Rentabilidad COLCAP		23,72%	12,72%	-19,50%	23,84%	-16,78%	15,69%	2,96%

Fuente: elaboración propia.

A pesar de encontrar que la hipótesis no se cumple en un año, la rentabilidad total del periodo diciembre de 2015 a diciembre de 2020 fue de 72,30% para el portafolio en pesos, mientras que para el índice fue de 6,38% según los datos en pesos. Al revisar este mismo periodo con los datos expresados en dólares se encuentra que la rentabilidad en diciembre de 2015 a diciembre de 2020 baja a 59,94%, al contrario, el índice se mejoró teniendo en cuenta que en el periodo de 2015 la devaluación del peso cercana a la de 2020, lo que le permite mejorar la rentabilidad expresado en

dólares. A pesar de lo anterior, la rentabilidad promedio anual de la inversión es mayor para en pesos y dólares para el portafolio eficiente, siendo de 11,50% y 9,85% en pesos y dólares, frente a una rentabilidad anual promedio para el índice de 1,24% y 2,96% en pesos y dólares.

Datos para México

Para conformar el portafolio se toma como punto de partida el valor del índice INMEX, en pesos mexicanos y el valor en riesgo para cada periodo, esta información se encuentra en la tabla 10.

Tabla 10. Valores del índice INMEX para México y VaR 2015-2020

Periodo	Cierre 31Dic15	Cierre 31Dic16	Cierre 31Dic17	Cierre 31Dic18	Cierre 31Dic19	Cierre 31Dic20
INMEX	2500,03	2688,82	2968,59	2469,27	2557,35	2684,66
VaR%	23,79	22,83	21,57	23,11	22,69	32,66

Fuente: elaboración propia.

La tabla 11, relaciona los portafolios eficientes generados por la herramienta para cada periodo, empezando el 31 de diciembre de 2015, donde se simula una inversión inicial de \$10.000 dólares que en pesos mexicanos es de \$171.800,00. Se calcula el valor de este portafolio con los precios de cierre a 31 de diciembre del siguiente año, así para 31 de diciembre de 2016 se alcanzó un valor de \$195.999,39 pesos y en dólares \$9.456,01 de acuerdo con la tasa de cambio a diciembre de 2016.

Tabla 11. Portafolio eficiente México a 31 de diciembre de 2015

Activo	Cierre 31Dic15	Cierre 31Dic16	Peso%	# Acciones (base 2015)	Valor portafolio 31Dic15	Valor portafolio 31Dic16
Gruma	220,04	240,40	32,70%	255,31	56.178,60	61.376,39
Vitro	52,07	63,39	20,30%	669,82	34.875,40	42.463,07
Bachoco Industrias	64,45	79,26	11,20%	298,54	19.241,60	23.663,06
Infras Energética	69,66	87,13	8,50%	209,62	14.603,00	18.263,99
Megacable Holdings	52,44	58,65	6,70%	219,51	11.510,60	12.874,87
OMA	69,53	76,98	5,70%	140,83	9.792,60	10.841,54
Grupo Aeroport Pacif	121,05	141,51	5,10%	72,38	8.761,80	10.242,61
Maseca B	23,20	23,99	4,60%	340,57	7.902,80	8.170,19
Prom YOp de Infra	184,04	157,79	2,80%	26,14	4.810,40	4.124,10
Aeromex	39,29	39,10	2,20%	96,20	3.779,60	3.761,32
Creal	40,54	25,75	0,20%	8,48	343,60	218,23
Total					171.800,00	195.999,39

Fuente: elaboración propia.

El portafolio a diciembre de 2015 se distribuyó en los sectores de alimentos y bebidas 37,3%, minerales no metálicos 20,3%, servicio de transporte 13%, agro y pesca 11,2%, energía eléctrica 8,5%, otros 6,7%, construcción 2,8% y finanzas y seguros 0,1%.

Con el capital obtenido de \$195.999,39 pesos a diciembre 31 de 2016, correspondiente a 9.456,01 dólares, se distribuye en el portafolio rebalanceado para el periodo de 31 diciembre de 2016 a 31 de diciembre de 2017, de acuerdo con los activos y su participación para este periodo se observa en la tabla 12.

Tabla 12. Portafolio eficiente México 31 de diciembre 2016

Activo	Cierre 31Dic16	Cierre 31Dic17	Peso%	# Acciones (base 2016)	Valor portafolio 31Dic16	Valor portafolio 31Dic17
San Luis Corp	57,97	57,56	26,90%	909,52	52.723,83	52.356,09
Vitro	63,39	70,24	14,80%	457,57	29.007,91	32.139,89
San Luis Corp	33,27	32,04	14,20%	836,51	27.831,91	26.797,89
Gruma	240,40	231,09	9,90%	80,72	19.403,94	18.652,41
Grupo Aeroport Pacif	141,51	176,21	8,80%	121,88	17.247,95	21.476,81
Bachoco Industrias	79,26	88,89	7,50%	185,46	14.699,95	16.485,99
Aeromex	39,10	28,59	4,30%	215,55	8.427,97	6.162,55
Megacable Holdings	58,65	70,84	3,50%	116,96	6.859,98	8.285,27
GInd Saltillo	29,55	28,47	3,40%	225,55	6.663,98	6.421,25
Fibra Danhos	22,88	23,94	3,40%	291,29	6.663,98	6.974,87
OMA	76,98	90,97	2,30%	58,56	4.507,99	5.327,20
Autlan Cia Minera	13,51	16,00	0,60%	87,06	1.176,00	1.393,23
Infras Energética	87,13	93,16	0,30%	6,75	588,00	628,68
Grupo Kuo	33,37	40,95	0,10%	5,87	196,00	240,51
Total					195.999,39	203.342,64

Fuente: elaboración propia.

Para 31 de diciembre de 2016 los sectores en los que estaba representada la inversión eran vehículos y piezas 41,1% minerales no metálicos 18,2%, servicio de transporte 15,5%, alimentos y bebidas 9,9%, agro y pesca 7,5%, otros 7,0%, minería 0,6%, energía eléctrica 0,3%, y maquinaria industrial 0,1%.

El capital que se obtuvo a diciembre de 2017 fue de \$203.342,64 pesos, equivalentes a \$10.346,65 dólares a diciembre de 2017. En la tabla 13, se muestran los cálculos de la inversión para cada activo en el portafolio del siguiente periodo: de 31 de diciembre de 2017 a 31 de diciembre 2018:

Tabla 13. Portafolio eficiente México 31 de diciembre 2017

Activo	Cierre 31Dic17	Cierre 31Dic18	Peso%	# Acciones (base 2018)	Valor portafolio 31Dic17	Valor portafolio 31Dic18
Vitro	70,24	52,81	32,60%	943,76	66.289,70	49.843,76
Grupo Airport Pacif	176,21	148,13	23,00%	265,42	46.768,81	39.314,72
Megacable Holdings	70,84	81,30	8,90%	255,47	18.097,50	20.769,55
San Luis Corp	57,56	78,69	7,70%	272,00	15.657,38	21.402,82
Bachoco Industrias	88,89	62,19	6,20%	141,82	12.607,24	8.819,41
Wal Mart de México	44,20	46,74	4,70%	216,25	9.557,10	10.108,03
Gruma	231,09	210,19	3,80%	33,44	7.727,02	7.028,12

Asureste	339,24	286,65	2,60%	15,58	5.286,91	4.467,31
Fibra PI	28,17	26,77	2,20%	158,78	4.473,54	4.249,90
Penoles Industrias	378,01	231,42	2,20%	11,83	4.473,54	2.738,66
Gmexico	53,71	35,27	2,00%	75,71	4.066,85	2.670,73
Aeromex	28,59	22,20	1,70%	120,91	3.456,82	2.684,21
Infraes Energética	93,16	70,88	1,60%	34,92	3.253,48	2.475,53
Fomento Econ México	176,40	163,27	0,80%	9,22	1.626,74	1.505,60
Total					203.342,64	178.078,35

Fuente: elaboración propia.

Para diciembre de 2017, el portafolio se representó en los siguientes sectores: minerales no metálicos 32,6%, servicio de transporte 27,3%, otros 11,1%, vehículos y piezas 7,7%, agro y pesca 6,2%, comercio 4,7%, alimentos y bebidas 4,7%, minería 4,2% y energía eléctrica 1,6%.

El capital obtenido a partir del portafolio a diciembre de 2018 fue de \$178.078 pesos, convertidos a dólares fue de 9.063,53 que se distribuye en el portafolio rebalanceado para el periodo 31 de diciembre de 2018 a 31 de diciembre 2019 en la tabla 14.

Tabla 14. Portafolio eficiente México a 31 de diciembre 2018

Activo	Cierre 31Dic18	02 sept 2019	Peso%	# Acciones (base 2017)	Valor portafolio 31Dic18	Valor portafolio 02Sep19
Qualitas Controladora	39,98	65,28	23,60%	1.051,22	42.026,49	68.627,06
Elektra Gpo.	941,30	1.390,00	23,60%	44,65	42.026,49	62.059,75
Megacable Holdings	81,30	79,26	17,20%	376,75	30.629,48	29.862,80
Autlan Cía. Minera	13,77	9,85	12,80%	1.655,27	22.794,03	16.304,39
Simec Grupo	57,13	59,05	7,90%	246,23	14.068,19	14.539,58
San Luis Corp	78,69	82,49	7,50%	169,73	13.355,88	14.001,27
Bolsa Mexicana de Valores	30,62	34,32	7,00%	407,16	12.465,48	13.973,57
Aleatica	22,76	18,06	0,40%	31,30	712,31	565,20
Total					178.078,35	219.933,62

Fuente: elaboración propia.

Los sectores económicos a diciembre de 2018, que conformaron el portafolio fueron: finanzas y seguros, 30,6%, comercio 23,6%, otros 17,2%, minería 12,8%, siderúrgica y metalurgia 7,9%, vehículos y partes 7,5% y construcción 0,4%.

A diciembre de 2019, se obtiene un capital de \$219.933,62 que, según la tasa de cambio para diciembre de 2019, la inversión ascendió a 12.029,33 dólares. Durante el periodo de diciembre 31 de 2018 a diciembre 31 de 2019, hubo necesidad de rebalancear el portafolio al 2 de septiembre de 2019, debido a que la acción de San Luis Corp tuvo su última fecha de negociación este día, de tal forma que a esta fecha se liquidó el portafolio y se generó uno nuevo, para este corte el portafolio se valorizó en \$219.933 pesos, que se distribuyó en el portafolio eficiente para esta fecha. Con los datos a diciembre de 2019 se distribuye según el portafolio eficiente a esta fecha, como se observa en la tabla 15, obteniendo para el cierre de 2020 un capital de \$259.778,51 equivalente a \$13.073,25.

Tabla 15. Portafolio eficiente México 31 de diciembre 2019

Activo	Cierre 31Dic19	Cierre 31Dic20	Peso%	# Acciones (base 2019)	Valor portafolio 31Dic19	Valor portafolio 31Dic20
Elektra Gpo	1.378,68	1.315,05	28,30%	46,75	64.451,89	61.477,34
Qualitas Controladora	78,04	107,14	26,90%	785,02	61.263,46	84.106,55
Fibra Mty	10,74	11,32	17,40%	3.688,05	39.627,67	41.738,08
Fibra Pl	39,34	44,18	5,30%	306,80	12.070,50	13.554,86
Bolsa Mexicana de Valores	39,62	47,16	4,90%	281,67	11.159,52	13.283,57
Wal Mart de Mexico	52,46	55,98	3,80%	164,97	8.654,32	9.234,77
OMA	141,83	128,39	3,60%	57,81	8.198,83	7.421,90
Cementos Chihuahua	100,03	119,55	3,10%	70,58	7.060,10	8.438,15
Fibraterra	27,98	30,09	2,40%	195,3571867	5.465,88	5.877,39
La Comer	21,89	45,38	2,00%	208,12	4.554,90	9.444,28
Aleatica	27,49	24,50	1,50%	124,28	3.416,18	3.044,74
Vesta	31,55	38,34	0,70%	50,53	1.594,22	1.937,31
Megacable Holding	75,38	72,68	0,10%	3,02	227,75	219,59
Total					227.745,21	259.778,51

Fuente: elaboración propia.

A diciembre de 2019, el portafolio se distribuyó en los sectores de comercio 34,1%, finanzas y seguros 31,8%, otros 25,2%, transporte y servicios 3,6%, minerales no metálicos 3,1% y construcción 2,3%.

Resultados México

Para los periodos analizados entre el 31 de diciembre de 2015 y 31 de diciembre de 2020 se encuentra que la rentabilidad del portafolio es superior a la rentabilidad del índice en todo el periodo analizado, excepto para 2017. En este caso, las acciones con mayor participación dentro del portafolio estuvieron a la baja o tuvieron incrementos muy discretos.

Tabla 16. Rentabilidad, VaR, e Índice Sharpe del Portafolio 2015-2020

Periodo	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Portafolio	171,800.00	195,999.39	203,342.64	178,078.35	227,745.21	259,778.51
Rentabilidad Portafolio		14.09%	3.75%	-12.42%	27.89%	14.07%
VaR(95%)	23.79%	22.83%	21.57%	23.11%	22.69%	32.66%
Índice Sharpe		0.59	0.04	-0.54	0.80	0.08
INMEX	2,500.03	2688.82	2968.59	2469.27	2557.35	2684.66
Rentabilidad INMEX		7.55%	10.40%	-16.82%	3.57%	4.98%
VaR(95%)	23.79%	22.83%	21.57%	23.11%	22.69%	32.66%
Índice Sharpe		0.30	0.35	-0.73	-0.27	-0.19

Fuente: elaboración propia.

Al igual que lo observado para el mercado colombiano, en la tabla 16, se consolidan los datos, donde se muestra que el riesgo supera a la rentabilidad para todos los años durante el periodo analizado, a pesar de esto, el portafolio de inversión muestra un comportamiento superior al del índice IMNEX para todos los años a excepción del año 2017 donde el índice Sharpe para el portafolio es de 0,04, muy inferior al 0,35 obtenido por el índice de referencia.

Al hacer la conversión de los portafolios de inversión a dólares, se encuentra que la rentabilidad obtenida por los portafolios creados supera ampliamente a la del índice INMEX.

Tabla 17. Rentabilidad del portafolio y rentabilidad del índice INMEX en dólares

Periodo	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2015-2020	Promedio Anual
Rentabilidad Portafolio	-5,44%	9,42%	-12,40%	32,72%	8,68%	30,73%	5,51%	
Rentabilidad INMEX	-94,81%	16,44%	-16,80%	7,48%	0,02%	-94,60%	-44,21%	

Fuente: elaboración propia.

En la tabla 17 se presenta la rentabilidad total en dólares en el periodo comprendido entre diciembre de 2015 a diciembre de 2020 fue de 30,73% para el portafolio, mientras que para el índice de referencia fue de -94,60%. Esta situación muestra una amplia diferencia entre el portafolio de inversión optimizado, teniendo en cuenta un mismo nivel de riesgo que el obtenido por el índice de referencia que, para este caso, es el INMEX.

Discusión

En el periodo comprendido entre el 31 diciembre de 2015 y el 31 diciembre de 2016, se analizó el comportamiento de la teoría de portafolios eficientes para los países de Colombia y México, encontrando una inversión extranjera con un capital inicial de \$10.000 dólares a diciembre 31 de 2015 y retirando la inversión el 31 de diciembre de 2020, hubiera sido más rentable en Colombia.

Se evidencia que el mercado de capitales de Colombia es considerablemente pequeño comparado con México y que las empresas que cotizan en bolsa se concentran en los sectores de energía eléctrica y seguros y finanzas. Por su parte, México ofrece una amplia gama de empresa y, así mismo, de sectores económicos. Sin embargo, las razones por las que resultan mejor opción la inversión en Colombia son que la rentabilidad de cada periodo es superior en Colombia, lo que se registra en la rentabilidad para 2015-2020 de 72,30% en Colombia, frente a la rentabilidad 51,21% en México para el correspondiente portafolio de cada país en su moneda.

Por otra parte, hay que considerar que, en general, la teoría de portafolios se cumple toda vez que en ambos países la rentabilidad anual promedio para el periodo analizado resulta superior que el índice en ambos países, lo que indica que conviene aplicar esta metodología a fin de obtener mejores resultados.

Adicionalmente, se encuentra que la devaluación de las monedas frente al dólar juega un papel importante, dado que para México la devaluación de su moneda durante el periodo analizado fue de 15,66% frente a la devaluación presentada en Colombia en los 5 años de 7,73%, lo que significó que al convertir el portafolio a dólares, se incrementó el beneficio en la inversión en Colombia, obteniendo para el periodo de 2015 a 2020 una rentabilidad de 59,94%, frente a 30,73% para México, con lo que la rentabilidad de México con respecto a Colombia disminuyó en 8,11% al cambio a dólares.

Finalmente, se observa que la teoría de portafolios eficientes aplicada a los mercados de Colombia y México tiene una validez importante, teniendo en cuenta que para ambos mercados se optimizaron portafolios de inversión con un nivel de riesgo equivalente al índice de referencia de cada país y los resultados medidos tanto por rentabilidad como por la relación rentabilidad-riesgo mediante el índice Sharpe fueron superiores en la mayoría de los años analizados para ambos mercados.

Referencias

- Álvarez, Y. (2021). Impacto de la pandemia por Covid-19 en la canasta accionaria del Colcap en Colombia. *Revista Pensamiento Gerencia*, 9(9).
- Berk, C. T. (2021). Dead or Alive: Modern Portfolio Theory Based on Financial Analysis. *Universal Journal of Accounting and Finance*, 8(4), 83-91.
- Bolsa de Valores de Colombia. (2020). Índices. <https://bit.ly/3RQrc2D>
- Bolsa Mexicana de Valores. (2020). ¿Qué es el INMEX? <https://bit.ly/3RB56Bu>
- Chakir, B. D. (2020). Random Matrices and Application to the Paris Stock Market Prices. *Pakistan Journal of Statistics*, 36(4), 321-339.
- Climent-Serrano, P. P.-F. (2020). Gestión eficiente de carteras: Modelo de Markowitz y el Ibex-35. *Cuadernos de Economía*, 43(121), 91-103.
- Fat, R. C. (2020). Techniques for Assessing Return and Risk of Investment Portfolios: A Case Study. *Napoca*.
- Georgalos, K. P. (2021). On the contribution of the Markowitz model of utility to explain risky choice in experimental research. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 182, 527-543. <https://doi.org/10.1016/j.jebo.2018.11.010>
- Gercekovich, D. G. (2020). Economic Assessment of Investment for the Production of Construction Products, Using the Mathematical Model. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 1295, 65-71. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63319-6_7
- Giannotti, C., Mattarocci, G., & Spinelli, L. (2011). The role of portfolio diversification in the hotel industry: Evidence from the Italian market. *EuroMed Journal of Business*.
- Gomes, A. S. (2020). Influence of investment in the Brazilian capital market portfolio (2013-2019). *Revista Iberoamericana de Sistemas e Tecnologías de Informacao*, 350-362.
- Gültekin, M., Shohfi, T., & Guerard, J. (2020). The Construction of Efficient Portfolios: A Verification of Risk Models for Investment Making. *Frontiers*, 1-6. <https://doi.org/10.3389/fams.2020.456346>
- Gupta, R. Y. (2017). Diversification into Emerging Markets – An Australian and the US Perspective Using a Time-varying Approach. *Australian Economic Papers*, 56(2), 134-162. <https://doi.org/10.1111/1467-8454.12081>
- Janjusevic, J. (2019). Modern Versus Traditional Assets Allocation Models on Imperfect Markets—Which One Is More Convenient for Investors? In *Creative Business and Social Innovations for a Sustainable Future*, 199-209.
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments*. New York Wiley.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 77-91.
- Medina, L. (2003). Aplicación de la Teoría del Portafolio en el Mercado Accionario Colombiano. *Cuadernos de Economía*, 22(39).
- Shadabfar, M. C. (2020). Probabilistic approach for optimal portfolio selection using a hybrid Monte Carlo simulation and Markowitz model. *Alexandria Engineering Journal*, 59(5), 3381-3393. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.05.006>
- Song, R., & Chan, Y. (2020). A New Adaptive Entropy Portfolio Selection Model. *Entropy*, 22(9), 1-20. <https://doi.org/10.3390/e22090951>
- Tarczyński, W. T.-Ł. (2018). The Construction of Fundamental Portfolio with the Use of Multivariate Approach. *Procedia Computer Science*, 126, 2085-2096. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2018.07.243>