La matemática como teoría de estructuras[1]

Mathematics as theory of structures

Cristian C. Vélez[2]

Resumen

En el siglo XX se estipuló que el análisis de las condiciones de posibilidad del conocimiento científico constituía uno de los objetivos centrales de la filosofía general de la ciencia. Por consiguiente, la filosofía de la matemática debería poder analizar las condiciones de posibilidad del conocimiento matemático de acuerdo con los enfoques dominantes en esferas como la ciencia natural. Pero, contrario a lo que sucede con el conocimiento científico-natural, donde la realidad de los fenómenos conocidos está dada, en matemática no hay consenso sobre cuál es la realidad acerca de la cual se ocupa. Uno de los problemas fundamentales que enfrenta hoy la filosofía de la matemática es, así, que para emprender una discusión sobre la posibilidad del conocimiento matemático se debe disponer de una ontología de la matemática, a fin de determinar qué es lo que se pretende conocer en dicho dominio teórico. En este artículo presentamos un enfoque que intenta satisfacer simultáneamente una adecuada explicación ontológica de la matemática y una acotación plausible de sus dificultades epistemológicas bajo el punto de vista de una matemática entendida como ciencia de estructuras puramente formales.

Palabras clave: matemática, estructuras, ontología, epistemología, patrones.

Abstract

In the twentieth century, it was stipulated that the analysis of the conditions of possibility of scientific knowledge was one of the central objectives of the general philosophy of science. And certainly, philosophy of mathematics is part of philosophy of science, so that we should be able to analyze the conditions of possibility of mathematical knowledge according to the dominant approaches in areas such as natural science. But, contrary to what happens with natural-scientific knowledge, where the reality of the phenomena known is given, in mathematics there is no consensus on what is the reality it is dealing with. One of the fundamental problems facing today's philosophy of mathematics is, then, that to undertake a discussion about the possibility of mathematical knowledge we should already have an ontology of mathematics, in order to determine what we want to know in such a theoretical domain. In this paper, we present an approach that tries to satisfy simultaneously an adequate ontological explanation of mathematics and a plausible account of epistemological difficulties from the point of view of mathematics understood as a science of purely formal structures.

Keywords: mathematics, structures, ontology, epistemology, patterns.

1 Recibido: 29 de marzo de 2013. Aceptado: 16 de octubre de 2013.

2 Universidad de Antioquia. Correo electrónico: velezespinosa@gmail.com.

1. El problema ontológico en la matemática

El conjunto de problemas filosóficamente cruciales sobre la matemática se puede restringir a dos dominios: los concernientes a la ontología y los relacionados con la epistemología de la matemática. Se ha observado, además, que tanto los problemas ontológicos como los epistemológicos estaban compenetrados con la noción de verdad y que el efecto de dicha compenetración es la imposibilidad de proporcionar una explicación filosófica plausible de la ontología y la epistemología de la matemática si no se tiene una comprensión adecuada de la verdad matemática. La posibilidad de dilucidar correctamente la relación entre las asunciones ontológicas sobre objetos matemáticos, con una teoría del conocimiento matemático y, por último, con la verdad de los enunciados matemáticos generó una dificultad *crucial* para comprender la naturaleza de la matemática. Esto ha llevado a considerar que su explicación satisfactoria debe mostrar que la teoría de la verdad, la ontología y la epistemología en matemática son compatibles entre sí.

La mencionada dificultad se ha convertido en el tema vertebral para la nueva filosofía de la matemática, y recibe el nombre de *dilema de Benacerraf.* Este dilema fue propuesto por Paul Benacerraf en un famoso artículo de 1973 titulado "La verdad matemática". Según el autor, la dificultad surge al comparar la verdad de los enunciados matemáticos con la de los enunciados empíricos. En el caso de un enunciado de contenido empírico al que se adscribe verdad, este resulta verdadero en virtud del *hecho* que el enunciado expresa. Por ejemplo, el enunciado 'la nieve es blanca' es verdadero porque la nieve es blanca. Semánticamente hablando, podemos decir también que es verdadero porque el término 'nieve' denota la nieve y el predicado 'es blanca' denota la cualidad de ser blanco, y al objeto nieve le conviene la cualidad de ser blanco. Ahora, analicemos el enunciado matemático '$a + b = c$'. Según lo anterior, este enunciado solo puede ser verdadero si el número denotado por a y el número denotado por b son tales que su suma es igual al número denotado por c; en otras palabras, '$a + b = c$' es verdadero solo si hay objetos que satisfacen esa afirmación, y en este caso solo podría tratarse de números. Así, si '$a + b = c$' es verdadero se debe a que *hay* números, es decir, la verdad de un enunciado matemático solo puede darse si los objetos matemáticos existen.

En términos generales, cuando el predicado de verdad se adscribe a enunciados matemáticos, en virtud de que ciertos objetos los satisfacen, esos objetos tienen que existir; pero estos han de ser abstractos y, a diferencia de los objetos empíricos y concretos, son entidades que encajan en la experiencia. Especificar la verdad de los enunciados matemáticos conducirá a un compromiso ontológico realista con objetos abstractos. Así mismo, si los enunciados matemáticos son verdaderos en virtud de que hay objetos abstractos que los hacen verdaderos, entonces, tal y como en el dominio de los objetos empíricos, deberíamos poder tener conocimiento de dichas entidades, de tal modo que ese conocimiento pueda considerarse de carácter matemático. Pero si, en un marco naturalista, el conocimiento posible en la esfera de los objetos empíricos está circunscrito a la experiencia, el conocimiento de las entidades abstractas debería circunscribirse también al campo de la experiencia. Sin embargo, puesto que tales entidades son abstractas, trascienden las condiciones de posibilidad del conocimiento empírico, están por fuera del espacio y del tiempo y no pueden entrar en nexos causales perceptivos. En consecuencia, no se podría especificar una epistemología matemática bajo el marco natural del conocimiento científico en general. Llegamos, de eso modo, a un dilema: o bien los enunciados matemáticos no son verdaderos en virtud de objetos matemáticos abstractos, o bien no hay conocimiento matemático. La verdad y el conocimiento matemático serían incompatibles. Este es el llamado 'dilema de Benacerraf'.

En las modernas doctrinas en filosofía de la matemática se ha intentando resolver la dificultad impuesta por este dilema. El *estructuralismo matemático* es una de las recientes escuelas filosóficas que procura dar cuenta de la posible compatibilidad entre la verdad matemática y el conocimiento matemático, principalmente dando una explicación plausible sobre la ontología matemática, esto es, sobre el estatuto y naturaleza de las entidades matemáticas.

2. Bourbaki y los orígenes del estructuralismo matemático

La asunción del punto de vista estructuralista en la matemática no es algo nuevo; fue sostenido, aunque no explícitamente nombrado de ese modo, por Dedekind y Peano en sus respectivos análisis acerca de los números. En particular, los dos contribuyeron al desarrollo de los axiomas de la aritmética elemental, que consisten en unas pocas reglas a partir de las cuales se puede generar la sucesión de los números naturales. Lo especial de estos axiomas es que nos llevan a pensar en una estructura, a saber, la estructura numérico-natural, como un *sistema de relaciones entre elementos cuya naturaleza nos es indiferente* (podría haber diferentes modelos, con diferentes elementos, que satisfacen los axiomas), y en la aritmética como la ciencia que trata sobre esa estructura. En "The Nature and Meaning of Numbers" Dedekind lo enuncia del siguiente modo:

> Si en la consideración de un sistema simplemente infinito N ordenado por una transformación ϕ descartamos enteramente el carácter especial de los elementos, reteniendo simplemente su distinguibilidad y teniendo en cuenta sólo las relaciones mutuas en que la transformación ordenadora ϕ los coloca, entonces esos elementos se llaman *números naturales* o *números ordinales* o simplemente *números* … Las relaciones o leyes que se derivan enteramente de las condiciones iniciales son, por lo tanto, siempre las mismas en todos los sistemas simplemente ordenados, cualesquiera nombres suceda que se les dé a los elementos individuales, ellos constituyen el objeto primero de la *ciencia de los números* o *aritmética* (1901, 33).

La idea central es que la estructura numérico-natural es la estructura común a cualquier progresión infinita correctamente ordenada por una relación de orden como la sucesión. Además, los así llamados números naturales no son más que cualquier cosa que opere como elemento de esa estructura: los números serían solo aquello que en cualquier progresión toma una posición que la relación de orden le asigna. Los números no serían ningún objeto en particular sino, en general, todo aquello que cumple la función de un número en una progresión; así, ser un número no es ser un *objeto abstracto* sino cumplir una función y tomar una posición en una estructura. Esa será una de las tesis fundamentales del estructuralismo. Así mismo, la visión de Dedekind es reforzada cuando atendemos a los axiomas de la aritmética, los cuales determinarán en sentido estricto la mencionada estructura numérico-natural. El conjunto de los cinco axiomas no lógicos de la aritmética (corrientemente llamados solo axiomas de Peano, aunque ya prefiguraban en la teoría de números de Dedekind) ha de considerarse un conjunto de enunciados caracterizadores de cualquier estructura progresiva cuyo tipo de orden es el orden natural de una estructura que se llamará secuencia de los números naturales. Todo modelo de estos axiomas debe constituir una estructura *isomorfa* con las demás, de tal modo que la secuencia de los números naturales sea rigurosamente la *estructura común* a todos sus modelos; esta constituirá una segunda tesis adoptada por el estructuralismo.

El conjunto de los axiomas de Dedekind-Peano puede ser visto filosóficamente como un conjunto de reglas que caracterizan y dan forma a la secuencia de los números naturales. Esta imagen sería generalizada por el grupo Bourbaki a la totalidad de la matemática. Su idea central era atender al efecto unificador de las teorías matemáticas tras la introducción del método axiomático, lo cual implicaba aceptar una unidad de objeto de investigación: las estructuras matemáticas. La base de su planteamiento se encuentra en que los axiomas de una teoría son siempre axiomas que determinan (construyen) una estructura. En otras palabras, las diferentes estructuras que estudian las diversas teorías matemáticas son estructuras que construyen cada uno de sus conjuntos propios de axiomas. Cada conjunto de axiomas de una teoría dada consiste en una serie de oraciones que enuncian unas relaciones, donde los elementos entre los cuales se definen esas relaciones carecen de una naturaleza especificada. Los axiomas se convierten así en leyes de construcción y el desarrollo de las consecuencias lógicas de esos axiomas en desarrollo de la estructura por ellos caracterizada. Uno de los ejemplos que aducen los Bourbaki en su famoso ensayo sobre la *Arquitectura de la matemática* de 1950 es la teoría axiomática de grupos. Los tres axiomas de esta teoría son leyes de composición que se enuncian de la siguiente manera: z

(i) Para cualesquiera elementos a, b, c pertenecientes a G y una operación binaria *, a * (b * c) = (a * b) * c. "Ley de asociatividad".

(ii) Para cualesquiera elementos a, b, c pertenecientes a G y unExiste un e perteneciente a G tal que para todo a, e * a = a * e = a. "Ley del elemento neutro".

(iii) Para cualesquiera elementos a, b, c pertenecientes a G y unPara todo a perteneciente a G existe un a–1 tal que, a * a–1 = a–1 * a = e. "Ley del elemento simétrico o elemento inverso".

Cualquier conjunto, dentro de cuyos elementos se ha definido una operación binaria, que satisface los axiomas (i), (ii) y (iii) se denomina un grupo o, también, una estructura de grupo. Sin embargo, obsérvese que se hace aquí una abstracción de la naturaleza del conjunto de elementos en cuestión. Es decir, una estructura de grupo resulta de cualquier cosa que cumpla las relaciones que los anteriores axiomas estipulan. Podemos decir también que esos axiomas —como todo conjunto de axiomas de cualquier teoría matemática— están formados por un sistema de reglas para construir un tipo de estructura. Las estructuras son constructos resultantes de unas reglas de construcción. En cuanto tales, los axiomas estipulan qué propiedades posee el tipo de estructura que ellos determinan, que son las propiedades de las relaciones definidas entre un conjunto de elementos cuya naturaleza es indiferente. En expresión de los Bourbaki:

> Ahora podemos hacer comprender lo que, de una manera general, debe entenderse por una *estructura matemática*. El rasgo común de las diversas nociones agrupadas bajo ese nombre genérico es que se aplican a conjuntos de elementos cuya naturaleza *no está especificada*; para definir una estructura, se dan una o varias relaciones en las que intervienen estos elementos …; se postula luego que la o las relaciones dadas satisfacen ciertas condiciones (que se enumeran) y que son los axiomas de la estructura considerada. Hacer la teoría axiomática de una estructura dada es deducir las consecuencias lógicas de los axiomas de la estruc-

> tura, *con exclusión de toda otra hipótesis* acerca de los elementos considerados (en particular, toda hipótesis sobre su naturaleza propia) (1950, 41-42).

Al adoptar ese enfoque sobre las estructuras matemáticas, el grupo Bourbaki propone expresamente una defensa de lo que denominaré aquí el *núcleo básico del estructuralismo*: los objetos matemáticos solo son elementos que ocupan una posición y cumplen una función en una estructura, por lo cual no tienen más propiedades que aquellas que las reglas de construcción de la estructura les asignan, propiedades de base estrictamente relacional. El siguiente paso del grupo será explicar lo que denomina "*arquitectura*" de la matemática, rótulo con el que enmarca su visión de conjunto de las matemáticas entendidas como *ciencias sobre estructuras*. Dicha arquitectura es representable, según los Bourbaki, como una *jerarquía* de estructuras. Como toda jerarquía, tiene una base constituida por estructuras elementales, y a partir de ella se da una complejización creciente, de lo general a lo particular. Existen tres tipos de estructuras matemáticas básicas denominadas *estructuras madre*: (a) estructuras algebraicas, (b) estructuras de orden y (c) estructuras topológicas. Las leyes que determinan cada tipo de estructura madre son cierto tipo de axiomas. Las estructuras algebraicas, como los grupos, cuerpos y anillos, son determinadas por leyes de composición; las estructuras de orden, como las progresiones y series, por leyes de ordenamiento y las estructuras topológicas, como los espacios y subespacios, por leyes de proximidad, límite y continuidad.

A partir de cada una de las estructuras madre se obtienen nuevas estructuras que suplementan su conjunto de axiomas con otros nuevos, de los cuales se seguirán más consecuencias lógicas. Por ejemplo, con los tres axiomas elementales de la teoría de grupos caracterizamos la estructura general de grupo, que pertenece a las estructuras algebraicas, pero al agregar a ese conjunto de axiomas uno nuevo que limite a un número finito los elementos de los grupos, se obtendrán estructuras de *grupos finitos*. Así mismo, en la jerarquía, algunas estructuras son derivadas al combinar axiomas de las estructuras madre; por ejemplo, si analizamos algunas leyes de composición combinadas con leyes que generan estructuras topológicas se obtendrán estructuras topológicas-algebraicas, que consisten en topologías sobre las cuales operan leyes de composición. La teoría de estas estructuras compuestas recibirá el nombre de *topología algebraica*. También se generan nuevas estructuras combinando estructuras de orden con estructuras algebraicas, y nuevas combinaciones de axiomas de esas estructuras derivadas darán como resultado más estructuras complejas nuevas. Por último, los Bourbaki observarán que en la jerarquía de estructuras matemáticas las estructuras estudiadas por las teorías clásicas como el análisis funcional, la geometría diferencial o la teoría de números ya no eran vistas como teorías de estructuras autónomas sino de estructuras encrucijadas: "… donde se cruzan y actúan unas sobre otras numerosas estructuras matemáticas más generales" (1950, 46).

Los Bourbaki también nos dicen que la concepción filosófica que adoptan sigue los lineamientos de un formalismo, según el cual el enfoque de que las estructuras, en cuanto formas abstractas, son el único objeto de la matemática. Bajo este tipo de formalismo estructuralista la cuestión de la naturaleza de las entidades matemáticas resulta ser un 'pseudoproblema', pues, según afirman, al concebir los números y los conjuntos como entes, solo tenemos de ellos vagas y plurales representaciones mentales; en cambio, al adoptar la postura formalista, no se ha de tener otra perspectiva sobre ellos sino que constituyen elementos en estructuras. Aquí las estructuras son determinadas formas abstractas en oposición a las estructuras concretas del mundo empírico, en especial por su carácter de constructos formales, no porque se originen en alguna abstracción a partir de la experiencia sensible. En una larga nota a pie de página, por lo general pasada de largo por los comentaristas, los Bourbaki ponen de manifiesto su visión frente a esos problemas metafísicos:

> Nos colocamos aquí en el punto de vista 'ingenuo' y no abordamos las espinosas cuestiones, mitad filosóficas, mitad matemáticas, que se han planteado respecto al problema de la 'naturaleza' los 'entes' u 'objetos' matemáticos. Baste decir que el pluralismo inicial de la representación mental de estos 'entes' —imaginados en un comienzo como 'abstracciones' ideales de la experiencia sensible, que conservan toda la heterogeneidad de aquéllas— ha sido substituida a raíz de las investigaciones axiomáticas de los siglos XIX y XX por una concepción unitaria, que reduce progresivamente todas las nociones matemáticas, primero a la de número entero, y luego, en una segunda etapa, a la noción de *conjunto*. Esta última, considerada durante mucho tiempo 'primitiva' e 'indefinible', ha sido objeto de polémicas interminables, debidas a su carácter de extrema generalidad y a la naturaleza muy vaga de las representaciones mentales que evoca; solo se desvanecieron las dificultades cuando se disipó la noción de conjunto (y con ella, todos los pseudoproblemas metafísicos sobre los 'entes' matemáticos), a la luz de las investigaciones recientes sobre el formalismo lógico; según esta nueva concepción, las estructuras matemáticas se convierten, propiamente hablando, en los únicos objetos de la matemática (1950, 41-42).

Ahora bien, la fuerza de la visión bourbakista sobre la arquitectura de la matemática —y su unidad epistémica a partir de las estructuras— fue históricamente opacada durante la primera mitad del siglo XX, y fue necesario esperar hasta finales del mismo siglo para que el programa estructuralista deviniera una escuela filosófica legítimamente constituida. El lema "la matemática como ciencia de patrones" es el que adoptarán los nuevos estructuralistas.

3. La matemática como teoría de patrones

Dos de las principales figuras modernas que han contribuido sustancialmente a consolidar el estructuralismo matemático son sin duda alguna Michael Resnik y Stewart Shapiro. El punto de vista de estos estructuralistas generaliza la visión de las teorías matemáticas como *ciencias de estructuras*, entendiendo por 'estructura' un cierto tipo de 'patrón'. Así, toda teoría matemática es una teoría sobre alguna estructura dada, y cada estructura construiría un patrón en el que los objetos matemáticos no son otra cosa que *posiciones. En Mathematics as a Science of Patterns,* Resnik lo expresa como sigue: "Los objetos matemáticos son posiciones abstractas sin rasgos distintivos en estructuras (o, más sugestivamente, en patrones); mis objetos matemáticos paradigmáticos son los puntos geométricos, cuyas identidades están fijadas solamente a través de sus relaciones con cada uno de los otros" (1997, 72-73). De manera similar, en *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*, Shapiro define una estructura como "la forma abstracta de un sistema, destacando las interrelaciones entre los objetos, e ignorando cualquier rasgo de ellos que no afecte el modo como se relacionan con otros objetos en el sistema" (1997, 74).

Según este enfoque estructuralista no hay objetos con estructura interna, solo posiciones en estructuras, y tales posiciones carecen de identidad o de características por fuera de esa estructura. Resnik, en particular, se apoya en la idea según la cual, al concebir los objetos matemáticos de manera aislada, tenemos dificultades para responder al problema de cómo tenemos conocimiento de ellos en términos de *interacción causal*; en consecuencia, a fin de revelar que esta idea es fundamentalmente errónea, se debe mostrar que los objetos matemáticos no tienen propiedades fuera de una estructura; no son objetos aislados sino puntos sin organización interna dentro de cierta configuración estructural que él llamará *patrón*. En uno de sus artículos dice: "Me resulta más sugestivo, por propósitos epistemológicos, hablar de patrones matemáticos y sus posiciones más que de estructuras. Veo los patrones y sus estructuras como *entidades abstractas*" (Resnik 1981, 530).

De acuerdo con la concepción de Resnik, cada teoría matemática es una teoría sobre algún patrón, entendido como entidad abstracta. Por tanto, un mismo patrón puede tener diversas instanciaciones u ocurrencias concretas. Cada instanciación de un patrón dado exhibe la misma regularidad; por ejemplo, en el caso de la aritmética cada progresión es una instancia del patrón ‘la serie de los números naturales’, cuya regularidad es la sucesión. En términos de Shapiro: “El patrón puede ser ejemplificado por diversidad de sistemas diferentes, pero en cada caso es el mismo patrón” (1997, 77). La teoría de números sería entonces una teoría sobre la estructura común a toda instancia de la serie de los números naturales. En general, cualquier teoría matemática trata acerca de un *tipo* de estructura, la cual puede tener diversidad de *muestras* (*tokens*) o ejemplificaciones, u ocurrencias. Es claro también que no hay patrones vacíos. No hay estructuras matemáticas sin elementos; el conjunto vacío no es una estructura sino un elemento dentro de una estructura: el patrón de la teoría de conjuntos. Todo patrón tiene al menos $n \geq 1$ posiciones. Los patrones con infinitas posiciones son patrones finitos indefinidamente extensibles en virtud de reglas y operaciones recursivas. Las operaciones entre posiciones se reflejan como relaciones, y las relaciones que se dan entre las posiciones son tales que las características o propiedades exhibidas por las posiciones son efectos de ellas.

Así, la estructura <N, ‘≤’> es un caso de patrón en el que gobierna sobre sus ‘objetos’, a saber el conjunto de las posiciones numérico-naturales, la operación recursiva ‘menor o igual que’, pero N no es nada fuera de <N, ‘≤’> porque no puede haber posiciones numéricas sin las relaciones u operaciones que las identifiquen justo como ese tipo de posiciones. Las posiciones no tienen rasgos sino dentro del patrón al que pertenecen. Esto nos lleva a considerar la *identidad* de cada posición porque con ella delimitamos *lo que es* cada posición en cuanto tal. En otras palabras, solo dentro de un patrón pueden ser identificadas las posiciones, y su *ser* como posiciones muestra que no son nada en absoluto de manera aislada. Esta es la generalización de Resnik de la ‘tesis relativista de la identidad’ de Benacerraf, y que trata sobre cómo la identidad de los objetos matemáticos (posiciones) depende de sus relaciones con otros objetos en la misma estructura. En otro lado dice Resnik: “Tomo los objetos matemáticos —números, conjuntos, funciones, puntos— como entidades sin estructura que ocurren en estructuras matemáticas, sirven como posiciones en ellas, y tienen su identidad determinada por sus relaciones con otras posiciones en la estructura a la cual pertenecen” (1982, 95). Si además solo dentro del patrón pueden ser identificadas las posiciones, también dentro del patrón pueden ser distinguidas, por lo que solamente dentro del patrón <N, ‘≤’> puede ser identificado el 1 y distinguido de 2 o 3. Esto concuerda con la descripción de Benacerraf de que el 3 solo puede ser lo que sucede a 1 y 2, y precede a 4 y 5, etc.

Para estos estructuralistas, además de que la identidad y la distinguibilidad de posiciones es un efecto de las relaciones en el interior de un patrón, también se dan relaciones superiores *entre* patrones. Resnik denomina ‘congruencia’ a la relación de similaridad o equivalencia estructural entre patrones. Dos patrones son congruentes si y solo si son estructuralmente isomorfos. Por ejemplo, los patrones <N, ‘≤’> y <N, ‘Scs’> son congruentes porque las operaciones ‘menor que’ y ‘sucesor’ producen, al aplicarse sobre N, estructuras *isomorfas*. En términos de la teoría de modelos, hablamos de ‘modelos isomorfos’ cuando nos referimos a sistemas formales, siendo un sistema formal lo que ahora llamamos un patrón; el conjunto de los modelos isomorfos de un patrón será el conjunto de patrones congruentes con él. Si dos patrones son estructuralmente equivalentes, cada uno puede ser visto como un modelo del otro; también puede decirse que cada uno es una instanciación del otro. Además de la relación de congruencia o equivalencia estructural entre patrones, Resnik determina que hay dos tipos de relaciones de *contención estructural*: de ocurrencia y subpatrón. La *ocurrencia* es una relación de contención de un patrón en otro. Sean A y B símbolos para patrones, entonces A ocurre en B si y solo si A es isomorfo con una estructura definible en B. Una ocurrencia de un patrón es un caso especial de instanciación de un patrón, la forma como un patrón tiene una instancia en otro patrón cuya estructura es isomorfa con la suya. La relación de *subpatrón* se define como: A es un subpatrón de B si y solo si toda posición de A es también una posición de B y A ocurre en B. Podemos observar que la congruencia es una condición para las relaciones de ocurrencia y subpatrón.

Ahora bien, la definida relación de congruencia puede generar inquietudes sobre la naturaleza de la identidad de las posiciones entre patrones congruentes, pues si afirmamos que solo dentro de un patrón ha de hablarse de identidad de una posición, ¿cómo se entiende que dos patrones congruentes sean una instanciación uno del otro? ¿No sucedería que ambos patrones tienen entonces los mismos tipos de objetos, es decir, de posiciones? Las posiciones tendrían que ser identificables por fuera de cada patrón al que pertenecen. Pero esto no se da porque dos patrones son congruentes unicamente en términos de su isomorfismo, y en este sentido solo importan las relaciones (aplicaciones u operaciones) que le dan forma a la estructura; el isomorfismo estructural es una relación de equivalencia. No se puede decir que dos patrones congruentes sean ‘el mismo’ patrón, sino que son patrones ‘equivalentes’ en estructura; la equivalencia no es aquí identidad. Si acaso se quisiera afirmar que dos patrones son ‘idénticos’ no solo porque en ellos se definen relaciones equivalentes, sino además porque tienen los *mismos* objetos, sucede que la identificación tendría como base la definición de identidad en términos extensionales. Entonces dos patrones A y B serían idénticos si y solo si toda posición de A es una posición de B. Sin embargo, dos patrones deben tener dos diferentes *universos de discurso*, y para afirmar la identidad entre patrones se requería un único universo común y singular. En cualquier caso, para el estructuralista las únicas relaciones plausibles entre patrones son las de equivalencia o 'similaridad' respecto de su forma, condición que llamaré *tesis de similaridad estructural*.

Cabe insistir, empero, en la posibilidad de interpretar una teoría en otra como criterio para la identidad de sus posiciones. La interpretación de una teoría sobre la base de sus modelos posibles parece estar en función de las posiciones del patrón que se toma como estructura modelo y las posiciones del patrón interpretado. Se supone que las posiciones en ambos patrones tendrían que satisfacer unas condiciones de homomorfismo para que de ese modo las posiciones en el universo del patrón que interpretan puedan satisfacer y hacer verdaderas las funciones proposicionales del patrón interpretado. Por esta vía se decía, por ejemplo, que los números son conjuntos porque la teoría de números puede ser interpretada en la teoría de conjuntos. Se entiende que la posibilidad de interpretar una teoría en otra es una forma de reducir la ontología de la primera a la ontología de la segunda. Esto no es estrictamente lo que sucede desde el punto de vista de Resnik, sino que en dichos casos observamos que el patrón de una teoría tiene *una* ocurrencia en el patrón de otra teoría. La reducción no sería otra cosa que contención estructural. Por ejemplo, la teoría de números tiene múltiples ocurrencias dentro de otros patrones, cada uno de los cuales se toma como un modelo suyo: el patrón llamado 'secuencia de los números naturales' tiene una ocurrencia en la *jerárquica de tipos*, pero también la tiene en un patrón geométrico interpretando las posiciones numéricas en su orden natural como puntos en una recta. Esto no nos puede llevar a decir que los números sean a la vez conjuntos y puntos. A la inversa, también la geometría puede ser interpretada aritméticamente, y no por ello reducimos ontológicamente los puntos a los números, pues si los patrones de la aritmética y la geometría son modelables entre sí y tomamos esto como criterio de reducción ontológica, tras el hecho de modelar la geometría en la aritmética los puntos serían números y al modelar la aritmética en la geometría los números serían puntos, pero con esto no sabríamos *qué son* esos elementos en realidad, si solo *hay* números o si solo *hay* puntos. Vemos que no se trata de cómo las interpretaciones modelistas aseguran que dos teorías tienen la misma ontología, sino de cómo una estructura puede ser presentada en otra, y esto es posible porque un patrón tiene una ocurrencia en otro patrón, de modo que la teoría del primero se reitera en la teoría del segundo, pero que, de hecho, ese mismo patrón puede tener múltiples ocurrencias en otros patrones.

La imposibilidad de identificar posiciones entre teorías, con base en la tesis relativista de la identidad, produce la necesidad de modificar ligeramente la teoría de la verdad de Tarski. De acuerdo con Resnik, en el enfoque tarskiano se requiere una teoría de la denotación tal que los términos singulares de cada teoría matemática denoten solo los objetos que satisfacen sus funciones proposicionales, pero con esto se deberá admitir la posibilidad de identificar objetos por fuera de cada teoría. Si la identificación de objetos o posiciones no puede ser llevada a cabo más que dentro de cada patrón, como ha intentado mostrar Resnik, la teoría de la verdad matemática tiene que disponer de una teoría de la denotación que admita la posibilidad de denotar de manera *parcial* diversos objetos no idénticos en dominios distintos. Es decir, que los términos singulares de una teoría T puedan tener *referencia múltiple*; a saber, la gama de posiciones en patrones distintos que, al ser tomados como modelos, puedan satisfacer las funciones proposicionales de esa teoría. De este modo, en el lenguaje de la teoría de números, los 'numerales' tienen que poder denotar tanto puntos como conjuntos; así, si *a* es la primera posición en la secuencia de los números naturales, entonces *a* ha de denotar parcialmente cualquier primer elemento de una progresión, sea geométrica, conjuntista o la que fuere. Mediante la modificación de la denotación, aceptando la referencia múltiple, no se altera el sentido de la teoría tarskiana de la verdad, sino que se evita el problema de la identidad de objetos entre teorías.

Para aclarar su posición, Resnik (1981) propone apelar a la relación de ocurrencia. La verdad sigue siendo definida recursivamente a la manera tarskiana, pero observaremos que esto será posible porque hemos *fijado* una ocurrencia del patrón de una teoría. Si, por ejemplo, se ha fijado una ocurrencia de la secuencia de los números naturales, digamos en la jerarquía de conjuntos, los enunciados numéricos serán verdaderos exactamente en ese patrón; se habrá determinado así la verdad de los enunciados de la teoría de números mediante una ocurrencia dada. Si tiene una ocurrencia en una progresión geométrica consistente de puntos en una recta, entonces aquí los numerales denotarán puntos y serán verdaderos exactamente para las posiciones en esa ocurrencia; en cualquier otra ocurrencia denotaran otras posiciones y serán verdaderos para ellas. En toda ocurrencia distinta se está verificando la instanciación de un mismo patrón, y la variación de la naturaleza de sus posiciones (es decir de sus 'objetos') es indiferente, pues solo interesa que las relaciones que caracterizan cada instancia tengan como efecto que esas posiciones jueguen como números. Con esto Resnik apunta a una doctrina de la *relatividad referencial*, que debe entenderse como algo relativo a la ocurrencia de un patrón y la congruencia entre ocurrencias en reinterpretaciones de ese patrón.

4. Una variación eliminativa del estructuralismo

El estructuralismo de Resnik es formulado de tal modo que debe suponer que las estructuras constituyen la ontología última de la matemática, pues las estructuras relativizan los objetos matemáticos a sus posiciones internas, pero ellas mismas habrán de ser tomadas como presupuestos ontológicos fundamentales de la matemática. Shapiro, sin embargo, no está completamente de acuerdo con Resnik en que las estructuras sean la ontología fundamental de la matemática, y opta por una variante del estructuralismo llamada *estructuralismo eliminativo*, que define como un *estructuralismo sin estructuras*: "Hablar, en general, de estructuras es una abreviación conveniente para hablar de sistemas. Un lema para el programa podría ser 'el estructuralismo sin estructuras' " (Shapiro 1997, 85). Esta versión del estructuralismo procura alcanzar una descripción de la matemática donde la ontología final, o de fondo, no contenga estructuras. Requiere un universo de objetos que contenga absolutamente todos los objetos suficientes para que los dominios de las estructuras de cada teoría matemática no sean vacíos. La idea de Shapiro es apelar al universo de la teoría iterativa de conjuntos, conocido como el universo V, y aceptar que el universo V contiene *toda la ontología* de la matemática. Al postular la existencia de todo conjunto en el universo V se garantizaría la existencia de suficientes objetos para ejemplificar cualquier estructura matemática. En consecuencia, toda estructura matemática constituye, para Shapiro, un *tipo de orden* entre conjuntos.

Así mismo, Shapiro denomina 'opción ontológica' a la asunción del universo conjuntista como ontología de toda la matemática. Pero, entonces, si toda estructura matemática es un patrón en el que solo tienen lugar relaciones entre conjuntos, las estructuras mismas no pueden constituir la ontología fundamental de la matemática; dicha ontología la conformará la jerarquía iterativa de conjuntos. Pero esto implica que la teoría iterativa de conjuntos no es una teoría sobre algún tipo particular de estructura, sino la teoría sobre el universo de todos los tipos de estructuras. No obstante, es la teoría lógico-matemática llamada *teoría de modelos* la que, propiamente hablando, se ocupa de las relaciones entre los tipos de estructuras y sus propiedades metateóricas. En virtud de esto, sus recursos expresivos deberán estar contenidos en la jerarquía iterativa de conjuntos. El universo de toda la matemática, incluidas las metamatemáticas, sería entonces el universo V. Así explicado, el trasfondo ontológico del estructuralismo de Shapiro no son las estructuras. Esto significa que en el máximo nivel ontológico las estructuras quedan eliminadas; de allí que su postura se denomine 'estructuralismo eliminativo'.

La característica fundamental de esta versión del estructuralismo es que la ontología de fondo no se entiende en términos estructuralistas. Si la jerarquía iterativa es el fondo, entonces la teoría de conjuntos no es, después de todo, la teoría de una estructura particular. Por el contrario, se trata de una clase particular de objetos: la ontología de fondo V. Tal vez desde un punto de vista diferente, la teoría de conjuntos se puede considerar el estudio de una estructura particular de V, pero esto requeriría otra ontología de fondo para cubrir los puestos de V. Tal ontología no debe ser entendida como los lugares de otra estructura o, si lo es, necesitamos una nueva ontología de fondo para sus lugares. En la opción ontológica, tenemos que detener el retroceso del sistema y la estructura en algún lugar. La ontología final no se entiende en términos de estructuras, incluso si todo lo demás en la matemática así lo fuera (Shapiro 1997).

El problema emergente es que Shapiro tendrá que explicar cómo armoniza su versión eliminativa con el núcleo del estructuralismo. Como hemos visto, dicho núcleo concibe los objetos matemáticos como posiciones en estructuras, pero en la versión eliminativa cada estructura no es más que un tipo de orden entre conjuntos —todas en el universo V—; por lo tanto, los objetos matemáticos deben ser posiciones de conjuntos en un dominio con relaciones definidas sobre ellos. Para determinar la igualdad de estructuras Shapiro elige, al igual que Resnik, la relación metateórica de equivalencia estructural o isomorfismo, bajo la definición de que 'dos sistemas son isomorfos si y solo si hay una correspondencia uno a uno de las posiciones y relaciones del primer sistema con las posiciones y relaciones del segundo'. El estructuralismo eliminativo parte de la esfera de la teoría de modelos para indicar cuándo las estructuras son equivalentes o isomorfas, pues los isomorfismos tienen la capacidad de mostrar la 'estructura de las estructuras'.

Nótese que el hecho de que Shapiro evite suponer que las estructuras mismas constituyen la ontología última de la matemática no evade el realismo, pues las estructuras siguen siendo entidades abstractas cuya existencia es denotada por el universo conjuntista V. Incluso él considera que las estructuras, explicadas a su modo, constituyen instancias abstractas de estructuras de objetos concretos: tipos de conjuntos de objetos físicos. Esta tesis lo lleva a simpatizar con el realismo. Ciertamente, en la medida en que Resnik y Shapiro adoptan una visión estructuralista de la matemática, rechazan un realismo sobre los objetos matemáticos particulares, concentrándose en las relaciones e interconexiones entre sus posiciones internas; sin embargo, al suponer que las estructuras mismas tienen existencia, persisten en un realismo sobre estructuras. En particular, el estructuralismo de Resnik-Shapiro mantiene un realismo al tomar las estructuras como cierto tipo de entidades. Resnik sostiene que las estructuras son la *forma abstracta* común a ocurrencias concretas de objetos; Shapiro defiende la misma tesis afirmando que las estructuras son entidades *universales*:

> Cabe señalar, sin embargo, que una estructura dada es abstracta en el sentido de que puede tener más de una ejemplificación. Por lo tanto, parece que tenemos un caso especial del problema sobre el estatuto de los universales: una estructura es un universal y un sistema de objetos que la ejemplifica que es una instancia (Shapiro 1983, 536).

Shapiro considera, como Resnik, que las instancias o ejemplificaciones de la estructura son organizaciones concretas y particulares en la realidad, de modo que la cuestión de la relación de las estructuras matemáticas con la realidad se resume en la relación entre entidades universales y sus instancias concretas: "La matemática es a la realidad como los universales a sus particulares instanciados" (Shapiro 1983, 536). Así, los universales, si bien son abstractos, no son independientes de sus ejemplificaciones concretas porque son la forma abstracta común a esas instancias. Shapiro afirma entonces que, por ejemplo, la estructura de los números naturales no existe independientemente de las estructuras que los ejemplifican, o a la inversa: esa estructura *existe* porque existen organizaciones concretas o instancias de las cuales esa es la estructura común; en consecuencia, las estructuras son entidades universales que deben existir. Sin embargo, Shapiro distingue entre una posición platónica y una aristotélica sobre universales. En la primera, los universales son independientes de sus instancias particulares; en la segunda, los universales no pueden existir independientemente de sus instancias pues constituyen su patrón común.

La naturaleza y estatuto de los tipos y los universales es un asunto profundo y controvertido en la filosofía. No hay escasez de puntos de vista sobre estas cuestiones. Se destacan dos tradicionales. Uno de ellos, propuesto por Platón, es que los universales existen con anterioridad e independientemente de cualquier cosa que pueda instanciarlos. Incluso si no hubiera objetos de color rojo, la forma de rojez seguiría existiendo. Este punto de vista a veces se llama 'realismo *ante rem*', y los universales así construidos son 'universales *ante rem*'. La principal alternativa, que se atribuye a Aristóteles, es que los universales son ontológicamente dependientes de sus instancias. No hay más rojez que aquello que todas las cosas rojas tienen en común. Deshazte de todas las cosas de color rojo, y la rojez se va con ellos. Destruye todos los seres buenos, todas las cosas buenas, y todas las buenas acciones, y se destruye la bondad misma. Un aleccionador pensamiento. Las formas así construidas se llaman 'universales *in re*', y el punto de vista se denomina a veces 'realismo *in re*'. Sus defensores pueden admitir que los universales existen en cierto modo, pero niegan que tengan una existencia independiente de sus instancias (Shapiro 1997).

Shapiro declara líneas después que su postura está de acuerdo con el realismo *in re*. Esto significa que su punto de vista sobre los universales es aristotélico y, por ende, cree que las estructuras matemáticas son ciertas entidades universales que existen, pero cuya existencia depende de estructuras reales en el mundo, las cuales constituyen sus instancias particulares. Así, es necesario resaltar que tanto para Resnik como para Shapiro las estructuras matemáticas son 'formas abstractas' existentes en el sentido fijado de 'universales'. Para explicar cómo surgen estas formas abstractas a partir de instancias concretas, estos estructuralistas apelan a un origen *empírico* de las creencias en patrones, intentando armonizar su estructuralismo con el *naturalismo epistemológico*. El propósito de naturalizar los patrones responde al deseo por desmitificarlos en cuanto entes *abstractos*. En particular, Resnik-Shapiro apelan a un *proceso de abstracción* que identifica patrones frecuentes en configuraciones de cosas mundanas. Estas representan, según Shapiro, las muestras (*tokens*) a partir de las cuales se reconoce una configuración común que llevará, por abstracción, a un patrón tipo (*type*). Un patrón tipo es un universal aristotélico originado a partir de sus muestras o instancias particulares, de tal forma que constituiría una configuración abstracta en el sentido de *abstraída*. De este modo, el problema epistemológico de la matemática no tendría como eje la posibilidad o imposibilidad de explicar cómo conocemos los objetos matemáticos, cuya existencia se limita a ser posiciones dentro de patrones, sino más bien a la posibilidad o imposibilidad del conocimiento de los patrones mismos, cuya existencia depende del mundo. El desafío epistemológico es replanteado entonces en términos de cómo es posible la *cognición* de patrones.

5. El reconocimiento o cognición de patrones

Al haber establecido cuál es el sentido de hablar de ontología desde el punto de vista de patrones, y proponer la idea de verdad para las teorías matemáticas en términos de cada ocurrencia de sus patrones (es decir sus modelos), a propósito de la relatividad referencial, hace falta ahora contrastar la solución de Resnik-Shapiro con la vertiente epistemológica del desafío de Benacerraf. Siguiendo los lineamientos que este último ha establecido para resolver la cuestión del conocimiento matemático, el problema que dichos estructuralistas deben enfrentar es cómo podemos formarnos creencias verdaderas y justificadas que cuenten como conocimiento matemático. Aquí las creencias no pueden ser sobre objetos matemáticos, sino sobre patrones. A plantear así la cuestión se evitará el problema de una inadecuada relación causal entre los sujetos del conocimiento y los objetos matemáticos, así como compromisos ontológicos con objetos particulares, aunque no con las estructuras mismas. En síntesis, hay que dar cuenta de la manera como llegamos a una cognición o reconocimiento de patrones, de tal modo que se pueda aceptar que no conocemos objetos matemáticos sino estructuras matemáticas. Por consiguiente, se debe proporcionar una explicación de cómo adquirimos creencias sobre estructuras, y qué tipo de evidencia cuenta como razones para la verdad de esas creencias.

Lo primero que debe poder ser explicado es un mecanismo para adquirir creencias sobre patrones. Dicha adquisición ha de ser entendida como un proceso a partir del cual surgen las creencias sobre estructuras. A fin de explicar esa génesis, Resnik propuso recurrir a un proceso empírico de abstracción gradual, partiendo de etapas en las cuales no se reconoce ningún patrón hasta la etapa en la cual se da una plena cognición de un patrón. Permítaseme citar a Resnik en este punto:

> Describiré el proceso de adquisición de creencias sobre patrones como una serie de etapas en las que las creencias de una persona, en respuesta a cierta experiencia, obtienen progresivamente más estructuras lógicas y que, a la larga, la envuelven en compromisos con entidades abstractas (1982, 96-97).

Es claro que para Resnik la adquisición de creencias sobre patrones está basada en la 'experiencia', y que a través de la repetición de la experiencia vamos agregando gradualmente más estructuras lógicas a nuestras creencias iniciales, cuyo resultado final será comprometernos con una estructura abstracta o llegar a creer en su existencia. En otras palabras, la experiencia cuenta como un proceso mediante el cual logramos progresivamente reconocer un patrón; durante cada etapa de la experiencia se van *abstrayendo* rasgos o relaciones que van dando lugar a cierta forma regular, y el final del proceso es el claro reconocimiento de una estructura dada en el fenómeno experimentado.

Para ser más precisos, Resnik piensa que el proceso de abstracción se inicia con una serie de procesos menores múltiples como atender a rasgos, resaltar características más regulares o percibir diferencias. Estos mecanismos darán lugar a lo que él llama 'planillas' (*template*):

> Reservando el término 'patrón' para patrones abstractos, usaré el término *planilla* para referirme a nuestros dispositivos concretos habituales para representarnos cómo las cosas están formadas, estructuradas o dibujadas. (…) Bajo las convenciones apropiadas las planillas representan otras cosas concretas,

> tales como edificios, artefactos o *performances*, las cuales se ajustan con ellas a la manera apropiada (Resnik 1997, 227).

Según esta descripción, las planillas son modelos de las cosas (también hechos y sucesos) con las cuales representamos el modo como las cosas están organizadas. Constituyen ciertos prototipos que permiten captar en el mundo físico determinados órdenes, pero que no prexisten al ordenamiento del mundo, sino que son derivados a partir de nuestra experiencia con las cosas mundanas y constituyen un aparato que se adecua representacionalmente a ellas. Luego las planillas conforman sistemas complejos que se especificaron mediante la asignación de alguna notación con el propósito de diferenciarlos entre sí, de modo que aquellas referentes a nuestra experiencia de configuraciones espaciales pudieran ser diferenciadas de nuestras planillas sobre configuraciones numéricas, etc. El paso posterior consiste en entenderlas como estructuras iniciales que describen configuraciones de cosas materiales en términos relacionales, tal que se pudiera abstraer de ellas solo los rasgos estructurales, vaciándolas del contenido y rasgos inherentes a las cosas, para quedarnos únicamente con su función como posiciones en esas configuraciones. Al llevar la abstracción hasta las posiciones ya no se suponen características intrínsecas, solo relacionales, obteniendo así patrones abstractos.

Shapiro no modifica mucho la visión de Resnik; para él la cognición de patrones es un mecanismo *psicolingüístico*. Según estima, el reconocimiento de patrones se funda en una facultad natural humana para reconocer regularidades, que inicia siempre con especímenes de colecciones de objetos físicos. La cognición de un patrón implica la participación activa de nuestros esquemas conceptuales, los cuales tienen un trasfondo lingüístico-conceptual, y sumados a las habilidades cognitivas nos llevan al reconocimiento de los patrones en las colecciones de objetos. Estos son 'muestras' que ejemplifican una configuración tipo. Se supone que un sujeto aprehende un 'tipo' cuando sus muestras exhiben la misma configuración, y esta da pie a la abstracción de un patrón común; en esta dirección expresa Shapiro:

> Para cada número natural *n*, existe una estructura ejemplificada por todos los sistemas que consisten de exactamente *n* objetos. Por ejemplo, el *patrón* 4 es la estructura común a todas las colecciones de cuatro objetos. El patrón 4 es ejemplificado por el cuadro de jugadores de partida de un equipo de béisbol …, los rincones de mi escritorio, y dos pares de zapatos (1997, 115).

Si tanto para Shapiro como para Resnik los patrones son abstraídos de la experiencia respecto de sus instancias mundanas, sucede que los patrones así obtenidos son estructuras *finitas*. ¿Cómo pueden ser las colecciones de objetos físicos muestras o instancias de sistemas infinitos, o estructuras de cardinalidad infinita como ℵ0? La idea común de estos autores es presumir que cualquier patrón abstraído finito se puede extender de manera indefinida mediante la repetición del proceso de agregar elementos conservando la ordenación común, pues el sujeto que capta tal configuración puede percatarse de que el sistema es extensible de manera indefinida, y podrá representárselo como si fuera infinito; aunque, ciertamente, dadas sus limitaciones materiales solo podrá dar con la idea acerca de un infinito *potencial*. Mediante el simbolismo lógico, podemos representar un patrón infinito en potencia como si fuera infinito en acto. En todo caso, la experiencia debe ser considerada, de acuerdo con el *espíritu naturalista* del realismo, como evidencia sobre la *existencia* del patrón base finito que ha sido abstraído. Por el flujo natural de la experiencia del mundo físico tenemos entonces cognición de patrones, y ellos exhiben una forma tal que la experiencia certifica que existe: "La naturaleza de las estructuras garantiza que ciertas experiencias cuenten como evidencia de su existencia" (Shapiro 1997, 118).

La génesis de una creencia sobre patrones obedece a un proceso abstractivo de naturaleza empírica con un soporte lingüístico-cognitivo. Por ejemplo, la génesis de nuestra creencia sobre la progresión de los números, especula Resnik, debió tener un desarrollo gradual cuyo punto cero pudo estar situado en los inicios de la vida humana, cuando los hombres primitivos experimentaron por primera vez la *equinumerocidad* de conjuntos concretos de objetos, tal vez comparando por conteo ciertas cosas, de modo que la experiencia repetitiva (conforme al desenvolvimiento de la historia) daría lugar al reconocimiento de ese patrón aritmético en las antiguas civilizaciones como Babilonia y Egipto. De la repetición de la experiencia los hombres pudieron haber abstraído las leyes más elementales de la aritmética como producto de una cognición paulatina de relaciones; por ejemplo, pudieron haber entendido que '3 es menor que 5' con base en la experiencia de que tener tres cosas es menos que tener cinco, luego de contarlas y compararlas varias veces. La primera etapa de contar y comparar explicaría la generación y el uso de predicados para que una idea rudimentaria de cantidad numérica encaje en ellos, pero en esa instancia no había aún numerales y por ello no se concebían todavía objetos abstractos. Esto pudo tener lugar, según Resnik, en una segunda etapa en la que la experiencia repetida pondría de manifiesto que se trata de un patrón constituido por una serie numérica, a partir del hecho de que el contar pone en evidencia un patrón en las cosas contadas, de tal modo que los predicados se pudieron haber tomar como nombres (numerales) que serían vistos como representantes de instancias individuales (números). Lo mismo habría sucedido en la geometría, donde al reconocer ciertos tipos de patrones espaciales se habría asignado nombres para las figuras comunes, cambiando la manera de hablar de 'cuadrado', 'circular' o 'triangular', que serían formas regulares de muchas cosas del campo de la experiencia visual, por 'cuadrados', 'círculos' y 'triángulos', en el sentido de cosas abstractas.

Al poner en esos términos el origen de la creencia sobre el patrón de los números, o de las figuras geométricas, Resnik se aventura en una especulación sobre una génesis empírica de las estructuras abstractas en general. Es evidente que las así llamadas 'estructuras abstractas' no serían justamente abstractas conforme a su carácter *ideal* o supranatural, sino en virtud de ser 'abstraídas' de repetidos procesos de experiencia. Las estructuras abstractas serían el patrón común a estructuras empíricas instanciadas *en el mundo*. Consiguientemente, si las estructuras abstractas están ellas mismas instanciadas en el mundo, por esta misma razón los patrones tienen que ser *reales*, y nos comprometemos con su existencia. En definitiva, Resnik conjuga una posición ontológica realista sobre las estructuras con una teoría empirista sobre la génesis de creencias acerca de esas estructuras.

Sin embargo, no se ha dicho hasta aquí por qué esas creencias han de contar como conocimiento matemático, solamente se ha aducido una explicación sobre su origen. En primer lugar, Resnik puso en consideración el hecho de que la matemática no se limita al análisis de los patrones obtenidos mediante la abstracción, sino que también se desarrolla por deducción hasta obtener patrones no intuitivos que difícilmente hubieran podido ser captados por la experiencia, y que quizá no puedan estar instanciados ya en el mundo. Esto lleva a Resnik a establecer una distinción entre patrones cuyo origen radica en la abstracción por la experiencia y patrones complejos producto de extender formalmente patrones del primer tipo. Esta distinción le permite diferenciar entre una teoría pura de patrones y una teoría aplicada:

> Una teoría pura de un patrón es una teoría deductivamente desarrollada o desarrollable que está basada en axiomas que pretenden caracterizar el patrón en cuestión. Sus aserciones no se extienden a afirmaciones relativas a cómo y dónde está instanciado el patrón, y son verdaderas de ese patrón sin tomar en cuenta su aplicabilidad en la experiencia (si la hay) de la cual ha sido abstraído. Una teoría aplicada de un patrón consistirá de una [teoría] pura junto con afirmaciones que indican cómo el patrón está instanciado, etc. (Resnik 1997, 101).

De acuerdo con Resnik, la génesis de la creencia o reconocimiento de un patrón tendría que diferenciarse de la evidencia que la apoya. Pero tras haber reconocido un patrón inicial la evidencia a su favor no puede ser deductiva; tal evidencia estará ligada a la experiencia de la que ha sido abstraída. Sin embargo, al extender deductivamente un patrón inicial, como estructura objeto de investigación de una teoría axiomatizada, obtenemos una teoría pura sobre un patrón cuyo apoyo es evidencia deductiva. Una teoría aplicada de un patrón contiene la descripción pura de ese patrón y es aplicable en la experiencia, donde esto ha de significar: ostenta un patrón que se muestra coherente con la experiencia de la cual ha sido abstraído. En este sentido, la teoría aplicada de un patrón podría ser falsada si la descripción pura del patrón no encaja con los datos de la experiencia, pues mostraría que constituye un patrón fallido que no exhibe la estructura real de las cosas. Pero si se trata de un patrón deductivamente desarrollado cuya complejidad es tal que lo hace inaplicable, esto es, no caracterizador de un patrón en la experiencia, entonces solo podría ser falsado por las propiedades formales de la teoría, por ejemplo, que sea inconsistente o que no caracterice un único patrón, es decir, que no sea una teoría categórica. Por consiguiente, Resnik concibe que las creencias sobre patrones pueden tener dos tipos de justificación, según se trate de un patrón asimilado en una teoría pura o aplicada; y del apoyo evidencial a favor de la creencia en ese patrón, sea cual fuere, se sigue que la podamos tomar como conocimiento matemático.

Así, sobre las estructuras iniciales finitas tenemos conocimiento cuya evidencia es no deductiva, mientras que sobre las estructuras complejas deductivamente extendidas tenemos evidencia deductiva. El conocimiento matemático podría tener entonces dos vertientes posibles: conocimiento de patrones con apoyo empírico y conocimiento de patrones con apoyo deductivo. En el caso específico de la suposición de un fragmento de conocimiento matemático cuya génesis y justificación es empírica, la concepción de Resnik será fácilmente alcanzada por nuestras aducidas críticas al empirismo y al cuasiempirismo matemático. En cambio, nuestras críticas no se extienden al fragmento de conocimiento matemático cuya justificación es puramente lógico-deductiva; este parece ser el más importante aporte de Resnik a la epistemología matemática. En particular, el criterio que él defiende para la evidencia deductiva de las teorías puras de patrones es la *consistencia* y la *categoricidad*. La primera mostrará que en ninguna ocurrencia (modelo) de un patrón hay alguna fórmula que resulta ser verdadera y falsa a la vez, y la segunda garantiza que en dos ocurrencias cualesquiera del patrón tales ocurrencias son congruentes (isomorfas). Para que se dé el desarrollo deductivo de una estructura, se habrá de suponer una lista finita de enunciados que constituyen los axiomas de la teoría sobre esa estructura. Tal conjunto de axiomas debe poder caracterizar unívocamente la estructura en cuestión.

Shapiro cree, por su parte, que cada conjunto de axiomas opera como una *definición implícita* que intenta caracterizar una determinada estructura. Esta idea se relaciona con la concepción que tenían los Bourbaki sobre el papel de los axiomas. Para el autor, una definición es implícita cuando el *definiendum* enuncia una serie de condiciones o características que el *definiens* satisface. Podemos definir implícitamente, por ejemplo, 'hombre heroico' del siguiente modo: un hombre es heroico si y solo si realiza acciones (a) bondadosas, (b) admirables, (c) peligrosas. De manera similar, los axiomas operan como enunciados que definen de modo implícito estructuras si y solo si estas satisfacen las relaciones y propiedades que ellos enuncian. Aquí las estructuras caracterizadas por los sistemas de axiomas resultan reflejar formalmente las estructuras concretas que constituyen sus instancias originarias. Por medio de las definiciones axiomáticas implícitas caracterizamos una estructura que se desplegada de manera deductiva, obteniendo todas sus consecuencias lógicas. Sin embargo, a diferencia de Resnik, Shapiro hace énfasis en que una teoría matemática *solo* tiene que disponer de justificación deductiva de la estructura que estudia, independientemente del hecho de que su génesis esté vinculada con configuraciones de objetos del mundo fáctico. Shapiro indica que, respecto del conocimiento matemático, la experiencia sensorial no tiene ningún papel en la justificación de la estructura caracterizada por su definición implícita ni en sus consecuencias lógicas. Por consiguiente, la experiencia no puede justificar el conocimiento matemático, cuyo efecto sería que tal conocimiento es *a posteriori*; por ende, Shapiro concluye que, con todo, el conocimiento matemático es *a priori*.

El carácter a priori de este conocimiento se fijaría por oposición al conocimiento empírico, dado que está basado en la deducción. Shapiro, además, llama la atención sobre el hecho de que el conocimiento de estructuras está ligado al lenguaje de las teorías. En concreto, los axiomas son enunciados del lenguaje de la teoría que definen implícitamente una estructura, son enunciados que expresan las relaciones fundamentales que la determinan; por lo tanto, las relaciones están incorporadas en el lenguaje de la teoría. Si las estructuras son consideradas como parte de la ontología requerida por la teoría, entonces la ontología obedece a su lenguaje. Luego, las entidades abstractas no existen independientemente del lenguaje, y puesto que es el lenguaje el que determina las estructuras, solo el lenguaje permite el acceso epistémico a ellas. De ese modo se pone de manifiesto la estrecha conexión entre los recursos lingüísticos de las teorías y la aprehensión epistémica de estructuras. Así pues, para Shapiro, la cognición de patrones nos lleva a compromisos con la existencia de patrones, pero el trabajo de una teoría matemática es desarrollar todas las consecuencias lógicas de esas estructuras partiendo de un grupo de enunciados que pueda caracterizarla satisfactoriamente. La definición implícita operada por los axiomas solo ha de disponer, de acuerdo con su punto de vista, de dos condiciones para que caracterice satisfactoriamente una estructura:

> Hay dos requisitos en una definición implícita. La primera es que al menos una estructura satisfaga los axiomas. Llamo a esto la 'condición de existencia'. El segundo requisito es que al menos una estructura esté descrita (con base en un isomorfismo). Esta es la 'condición de unicidad' (Shapiro 1997, 132).

La idea de Shapiro se centra en que las consecuencias lógicas de los axiomas muestran si ellos caracterizan una única estructura cuando la teoría así obtenida es consistente, dado que por *el teorema de satisfacción* de Henkin, que intuitivamente dice que todo conjunto de fórmulas consistente es satisfacible, si la teoría es consistente entonces tiene un modelo. El segundo requisito es que la teoría sea categórica, pues si lo es todos sus modelos son isomorfos, y en consecuencia se caracteriza un solo tipo de estructura. En definitiva, en el conocimiento matemático solo desempeñan un papel relevante el lenguaje de cada teoría y su desarrollo deductivo, el cual permite decidir si es consistente y categórica. Sin embargo, vemos que Shapiro denomina a la condición de consistencia una *condición de existencia*. Esto se debe a que la consistencia de la teoría sobre la estructura dada comporta la existencia de al menos un modelo de la teoría. No obstante, aquí 'existencia' no tiene un carácter ontológico, pues el hecho de que una teoría tenga un modelo simplemente puede discernirse en términos de que es posible modelarla en al menos otra teoría con una estructura congruente. En síntesis, si bien los estructuralistas en el terreno de la matemática tienen posturas epistemológicas diferentes acerca de cómo llegamos al conocimiento de estructuras, comparten *en gran medida* una postura ontológica común: cada teoría matemática describe una estructura, cuya arquitectura es definida por puras relaciones. En esa concepción los objetos matemáticos no son más que posiciones en estructuras y carecen de cualesquiera propiedades intrínsecas.

Trabajos citados

Benacerraf, P. "Mathematical Truth". *The Journal of Philosophy* 70 (1973): 661-667.

Bourbaki, N. "The Architecture of Mathematics". *The American Mathematical Monthly* 57 (1950): 221-232.

Dedekind, R. "The Nature and Meaning of Numbers". *Essays on the Theory of Numbers*. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1901.

Resnik, M. "Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference". *Noûs* 15 (1981): 529-550.

—. "Mathematics as a Science of Patterns: Epistemology". *Noûs* 16 (1982): 95-105.

—. *Mathematics as a Science of Patterns*. New York: Clarendon Press and Oxford University Press, 1997.

Shapiro, S. "Mathematics and Reality". *Philosophy of Science* 50 (1983): 523-548.

—. *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology.* New York: Oxford University Press, 1997.

Tarski, A. "The Concept of Truth in Formalized Languages". *Logic, Semantics and Metamathematics.* Oxford: Clarendon Press, 1956.