

TRANS-ESTADÍSTICA CUÁNTICA DESDE UNA ONTOLOGÍA DE PROPIEDADES*

QUANTUM TRANS-STATISTICS FROM AN ONTOLOGY OF PROPERTIES

MATÍAS PASQUALINI
CONICET – Instituto de Investigaciones
“Dr. Adolfo Prieto”,
Universidad Nacional de Rosario
Rosario, Argentina.
matiaspasqualini@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-0084-1363>

SEBASTIAN FORTIN
CONICET – Universidad de Buenos
Aires, Argentina
Buenos Aires, Argentina.
sfortin@conicet.gov.ar
<https://orcid.org/0000-0002-4531-7461>



RESUMEN

En los últimos años, el comportamiento bosónico que un sistema de fermiones puede exhibir ha despertado el interés de los físicos. En este trabajo, se adopta un enfoque basado en estructuras producto tensorial y se asume una ontología de propiedades para argumentar en favor de la relatividad de la noción de identidad estadística y en favor de una interpretación realista del comportamiento trans-estadístico.

Palabras clave: filosofía de la física; partículas virtuales; bosones compuestos; estructura producto tensorial; ontología de propiedades.

* Este artículo se debe citar: Pasqualini, Matías y Fortin, Sebastián. “Trans-estadística cuántica desde una ontología de propiedades”. *Revista Colombiana de Filosofía de la Ciencia* 23.47 (2023): 255-291. <https://doi.org/10.18270/rcfc.v23i47.4186>

ABSTRACT

In recent years, the bosonic behavior that a many-fermion system can exhibit has raised interest among physicists. In this paper, an approach based on tensor product structures is taken and an ontology of properties is assumed to argue for the relativity of the notion of statistical identity and for a realistic interpretation of trans-statistical behavior.

Keywords: philosophy of physics; virtual particles; composite bosons; ontology of properties; tensor product structure.

1. INTRODUCCIÓN

Según la mecánica cuántica, los sistemas compuestos por partículas idénticas son fermiones o bosones de manera mutuamente excluyente. No obstante, en ciertas circunstancias, pares de fermiones pueden comportarse como bosones compuestos, denominados cobosones. En general, en el ámbito de la física, se considera que este comportamiento no puede interpretarse de manera realista, sino que es una mera descripción basada en modelos idealizados y, por ende, aproximados. Este artículo defiende la idea de que el comportamiento bosónico que puede exhibir un sistema de fermiones puede ser interpretado de modo realista si se asumen ciertos compromisos ontológicos. Para ello, se utilizará: (1) un sencillo modelo de juguete que emplea distintas particiones del espacio de Hilbert, también denominadas *estructuras producto tensorial* (TPS por sus siglas en inglés), a partir del cual se argumenta que la identidad estadística (fermiónica o bosónica) de un sistema compuesto por partículas idénticas es relativa al TPS; y (2) una ontología de propiedades donde los sistemas cuánticos son vistos como cúmulos de propiedades posibles, sin condiciones de identidad propias de objetos individuales. La estructura del artículo es la siguiente: La Sección 2 introduce al lector en una característica cuántica denominada indistinguibilidad, que determina la identidad y comportamiento ante permutaciones de los sistemas cuánticos. La Sección 3 aborda el fenómeno del comportamiento trans-estadístico y su interpretación convencional en el ámbito físico. La Sección 4 presenta brevemente algunos resultados del enfoque basado en

TPSS que varios autores han desarrollado en años recientes, enfoque en el que esta propuesta busca inscribirse. La Sección 5 propone una versión en formalismo de espacios de Hilbert del modelo de juguete, sugiriendo la relatividad de la noción de identidad estadística con respecto al TPS. La Sección 6 ofrece una visión general de los desafíos ontológicos que plantea la mecánica cuántica e introduce la ontología de propiedades posibles, inspirada en el formalismo algebraico. Finalmente, la Sección 7 presenta una versión en formalismo algebraico del modelo de juguete de la Sección 5, mostrando con mayor claridad la pertinencia de una ontología de propiedades para explicar el comportamiento trans-estadístico de manera realista.

2. INDISTINGUIBILIDAD CUÁNTICA Y COMPORTAMIENTO ESTADÍSTICO

El comportamiento estadístico de los sistemas cuánticos, cuyos subsistemas poseen propiedades idénticas, difiere significativamente del de sus contrapartes clásicas. Por razones que se explicarán a continuación, este comportamiento cuántico se basa en la premisa de que los subsistemas cuánticos del mismo tipo son indistinguibles. La mecánica estadística surge para explicar el comportamiento de sistemas complejos cuyas propiedades macroscópicas se derivan de los estados de sus subsistemas. Tomemos, por ejemplo, un volumen de gas a una determinada temperatura, la cual está relacionada con la energía cinética de sus moléculas. Dado que es inviable obtener información sobre el estado individual de cada subsistema, se recurre a métodos estadísticos. Estos métodos presuponen que todas las posibles distribuciones de los subsistemas entre los diferentes estados tienen la misma probabilidad. En el siguiente ejemplo, estas distribuciones de subsistemas entre estados posibles se denominarán "complexiones". Considérese dos subsistemas S_A y S_B , y dos posibles estados $|\Psi_1\rangle$ y $|\Psi_2\rangle$. Si los subsistemas son clásicos, se obtienen las siguientes complexiones (Fortin & López 2016):

- (1) S_A y S_B se encuentran ambos en el estado $|\Psi_1\rangle$.

- (2) S_A se encuentra en el estado $|\Psi_1\rangle$ y S_B en el estado $|\Psi_2\rangle$.
- (3) S_B se encuentra en el estado $|\Psi_1\rangle$ y S_A en el estado $|\Psi_2\rangle$.
- (4) S_A y S_B se encuentran ambos en el estado $|\Psi_2\rangle$.

Es importante señalar que al tomar la compleción (2) y permutar los subsistemas entre los estados (o, de manera equivalente, permutar los estados entre los subsistemas) se obtiene la compleción (3). La estadística que surge al considerar que las permutaciones de subsistemas resultan en diferentes compleciones es conocida como la distribución de Maxwell-Boltzmann y se utiliza en el contexto clásico.

Considérese ahora el caso de subsistemas cuánticos, en particular, partículas de espín entero o bosones. Se obtienen las siguientes compleciones:

- (1) Ambos sistemas se encuentran en el estado $|\Psi_1\rangle$.
- (2) Un sistema se encuentra en el estado $|\Psi_1\rangle$ y el otro en el estado $|\Psi_2\rangle$.
- (3) Ambos sistemas se encuentran en el estado $|\Psi_2\rangle$.

Debe notarse que para subsistemas cuánticos no tiene sentido conservar las etiquetas S_A y S_B . Esto se debe a que, a diferencia del caso clásico, al tomar la compleción (2) y permutar subsistemas, no se obtiene una compleción distinta que deba ser contabilizada estadísticamente. Contrario a lo que se podría esperar, permutar subsistemas cuánticos del mismo tipo no tiene consecuencias observacionales. Esta particularidad de los subsistemas cuánticos se refleja en lo que se denomina postulado de indistinguibilidad. (PI_{st}) (se le añade la especificación estándar porque más adelante se presentará una versión del PI centrada en los observables y no en los estados):

PI_{st}: Si el vector $|\psi\rangle$ representa el estado del sistema compuesto cuyos subsistemas son indistinguibles, entonces el valor medio de

cualquier observable representado por un operador O debe ser el mismo para $|\psi\rangle$ y para cualquier permutación $|\psi'\rangle$

$$\text{PIst: } \langle \psi' | O | \psi' \rangle = \langle \psi | O | \psi \rangle \text{ siendo } |\psi'\rangle = P |\psi\rangle \quad (1)$$

Donde P es un operador de permutación genérico (ver Butterfield 1993). Este postulado llevó a algunos de los padres fundadores de la mecánica cuántica, como Born y Heisenberg, a considerar que los sistemas cuánticos pueden comportarse como entidades no individuales. En efecto, entre sistemas cuánticos puede existir una diferencia meramente numérica, incluso cuando todas sus propiedades sean indistinguibles. Si existiera identidad numérica entre ellos (es decir, si fueran el mismo objeto), solo se habrían contado dos complexiones en el ejemplo anterior. Si los sistemas poseyeran al menos algunas propiedades distinguibles, deberíamos haber contado cuatro complexiones, como sucede en el caso clásico. Sin embargo, la ley estadística aplicable a bosones nos lleva a contabilizar solo tres complexiones en nuestro ejemplo. Es imperativo aceptar que, en el contexto cuántico, sistemas indistinguibles pueden ser numéricamente distintos, lo que resulta en una violación del principio de identidad de indiscernibles de Leibniz. Este principio, formulado en la metafísica clásica, sirve como criterio de identidad numérica para sistemas clásicos que poseen condiciones de identidad que los definen como objetos individuales.

La estadística cuántica mencionada en el ejemplo anterior es conocida como estadística de Bose-Einstein. De ahí que las partículas de espín entero que siguen esta ley estadística se denominen “bosones”. Correspondientemente, diremos que sistemas indistinguibles que se rigen por esta ley tienen identidad estadística bosónica (utilizando aquí la noción de identidad en términos de identidad *cualitativa*). No obstante, es esencial señalar que esta no es la única estadística aplicable a sistemas cuánticos. Las partículas de espín semientero, o fermiones, están regidas por el principio de exclusión de Pauli, que prohíbe que dos o más partículas coexistan en el mismo estado. Para estas partículas, la única complexión posible en nuestro ejemplo de sistema compuesto por dos subsistemas y dos estados es:

- (1) Un sistema se encuentra en el estado $|\Psi_1\rangle$ y el otro en el estado $|\Psi_2\rangle$.

Los fermiones obedecen la estadística conocida como Fermi-Dirac, de la cual derivan su nombre. Diremos que sistemas indistinguibles que acatan esta ley estadística tienen identidad estadística fermiónica (en el sentido de identidad *cualitativa*). La diferenciación entre los dos tipos de identidad estadística (fermiónica y bosónica) en el contexto cuántico se debe al hecho de que PI_{st} se cumple únicamente en estados simétricos $|\psi_s\rangle$ o antisimétricos $|\psi_A\rangle$ respecto a los operadores de permutación. Ambos tipos de estado son autoestados de los posibles operadores de permutación, con autovalores (1) y (-1) respectivamente. Esto es:

$$\begin{aligned} P|\psi_s\rangle &= |\psi_s\rangle \\ P|\psi_A\rangle &= -|\psi_A\rangle \end{aligned} \tag{2}$$

Por la naturaleza del formalismo, se aclara el principio de exclusión mencionado previamente, introducido en sus inicios para explicar la distribución de electrones entre diferentes niveles de energía en la estructura atómica. Debido a esto, se incorporó al formalismo de la mecánica cuántica un postulado adicional: el postulado de simetrización (PS). Este postulado representa una restricción *ad hoc* sobre el conjunto de estados posibles que el formalismo admite para sistemas con subsistemas indistinguibles, garantizando en estos, la satisfacción de PI_{st} . PS puede formularse (Fortin & Lombardi 2021):

PS: Un sistema de múltiples partículas idénticas debe ser representando por un estado cuántico totalmente simétrico (bosones) o por uno totalmente antisimétrico (fermiones), donde la simetría o antisimetría queda definida en términos de los operadores de permutación P .

$$|\psi'\rangle = P|\psi\rangle = \pm |\psi\rangle \tag{3}$$

Para obtener estados simétricos $|\psi_S\rangle$ o antisimétricos $|\psi_A\rangle$ deberán aplicarse respectivamente operadores de simetrización S o antisimetrización A a un estado genérico $|\psi\rangle$

$$\begin{aligned} S|\psi\rangle &= |\psi_S\rangle \\ A|\psi\rangle &= |\psi_A\rangle \end{aligned} \tag{4}$$

Basándonos en lo expuesto hasta ahora, parece lógico interpretar que la identidad estadística de un sistema compuesto está predeterminada de manera absoluta en un nivel más fundamental que el directamente descrito por el formalismo de la mecánica cuántica. Esto se debe a que es necesario añadir al formalismo una restricción específica: simetrizar el estado o, alternativamente, antisimetrizar el estado. Dicho de otra manera, parece que para abordar la noción de identidad estadística es preciso incorporar *ad hoc* un postulado que complemente al formalismo y lo alinee con el comportamiento estadístico efectivamente observado. Claramente, con esta interpretación, resulta complicado aceptar cualquier tipo de trans-estadística en un sentido realista, ya sea en términos de identidad o comportamiento. Sin embargo, como se mostrará más adelante, la argumentación que se desarrollará en este artículo busca desafiar esta interpretación, relativizar la noción de identidad estadística y permitir una comprensión realista del comportamiento trans-estadístico.

3. EL COMPORTAMIENTO TRANS-ESTADÍSTICO

En esta exposición, se denomina “comportamiento trans-estadístico” a un fenómeno particular que ha capturado la atención de los físicos durante varias décadas. Se refiere al hecho de que, en determinadas circunstancias, un sistema de fermiones muestra, inesperadamente, un comportamiento estadístico bosónico. Se sostiene que pares de fermiones pueden comportarse como bosones compuestos, también llamados cobosones. Es importante señalar que no nos referimos a los

casos ya conocidos en los que se observa una interacción nuclear fuerte entre fermiones, como en un conjunto de protones y neutrones (partículas de espín semientero) que interactúan mediante la fuerza nuclear fuerte para formar un núcleo atómico. Por ejemplo, dos protones y dos neutrones pueden conformar un núcleo de Helio-4. Estos núcleos atómicos son sistemas compuestos que pueden manifestar comportamiento bosónico empíricamente verificable, como la superfluidez (Brooks & Donnelly 1977).

Por otro lado, el comportamiento trans-estadístico no se deriva de la interacción nuclear fuerte entre fermiones, y por lo tanto, cada subsistema puede ser dinámicamente independiente. Esta característica hace que el fenómeno sea teóricamente intrigante, ya que, según el postulado de simetrización, el estado de un sistema compuesto debe ser simetrizado o antisimetrizado *ab initio*, mientras que la ley dinámica de la mecánica cuántica no permite que un estado simétrico evolucione hacia un estado antisimétrico y viceversa. La simetría o antisimetría del estado de un sistema compuesto aislado debe mantenerse en cualquier evolución dinámica unitaria. Law (2005) abordó este fenómeno y descubrió que el grado de entrelazamiento entre fermiones determina hasta qué punto un sistema de fermiones actúa como un sistema de cobosones, y que las interacciones no son esenciales. Si existen, simplemente intensifican las correlaciones cuánticas, que sí parecen ser cruciales para el surgimiento del comportamiento bosónico. Posteriormente, Chudzicki *et al.* (2010) y Tichy *et al.* (2014) lograron una generalización del enfoque de Law usando operadores de creación y destrucción. Este fenómeno también es relevante debido a sus aplicaciones en áreas como el procesamiento de información cuántica (Gigena & Rossignoli 2015), los condensados de Bose-Einstein (Avancini *et al.* 2003; Rombouts *et al.* 2003), los excitones (Combescot & Tanguy 2001), los pares de Cooper en superconductores (Belkhir & Randeria 1992) y las moléculas de Wigner confinadas (Cuestas *et al.* 2020).

Generalmente, en el campo de la física, se tiende a aceptar que el comportamiento trans-estadístico no puede interpretarse de manera realista. La interpretación predominante sostiene que atribuir un comportamiento bosónico a un sistema de fermiones es simplemente una descripción empíricamente adecuada, que se basa en el uso de modelos idealizados y, por ende, inherentemente aproximados (ver, por ejemplo, Tichy *et al.* 2014). Para ilustrar este punto,

consideremos el movimiento perpetuo que se infiere de los modelos utilizados para analizar péndulos. Los físicos entienden que un movimiento perpetuo no es esperable en un péndulo real, que solo se comporta de manera aproximada en relación con el modelo ideal. De manera similar, el comportamiento bosónico de un sistema de fermiones pertenece, en un sentido estricto, a un modelo ideal y se aplica a sistemas reales solo de manera aproximada. Designar como comportamiento bosónico al comportamiento de un sistema de fermiones es simplemente una descripción útil. Esta interpretación se ve respaldada por estudios previamente mencionados que relacionan el comportamiento trans-estadístico con el grado de entrelazamiento entre los fermiones de cada par. Así, el comportamiento bosónico, en un sentido estricto, sería viable solo en una situación ideal donde el grado de entrelazamiento es total, es decir, cuando $K = M$, donde K es el número de Schmidt y M es el número de modos que contiene la descomposición de Schmidt del estado (ver Law 2005). Se considera, por lo tanto, que el comportamiento estadístico de un sistema de fermiones se asemeja al comportamiento bosónico, pero sin ser bosónico en un sentido estricto. La transición de un comportamiento estadístico a otro se entiende, entonces, como una mera descripción útil sin referente *in re*. De manera consecuente, el estatus ontológico de los cobosones se ve disminuido. Se les considera como partículas virtuales o cuasipartículas, no comparables con los bosones convencionales, que se asumen como elementales.

4. EL ENFOQUE TPS

Una Estructura Producto Tensorial (TPS, por sus siglas en inglés) es una forma específica (entre varias posibles) de factorizar o dividir el espacio de Hilbert, que representa un sistema, en subespacios que representan a sus subsistemas. A modo de ejemplo, considérese un sistema U con Hamiltoniano asociado H_U y autoestados $|N\rangle$ tales que $H_U |N\rangle = E_N |N\rangle$, donde E_N son los valores posibles del observable energía. Los autoestados $|N\rangle$ constituyen una base que genera el espacio de Hilbert $\mathfrak{H}_U$, representante del sistema U , y en el cual se pueden definir

los estados posibles $|\psi\rangle$ de U . Supongamos que es posible factorizar los autoestados $|N\rangle$ por medio del producto tensorial $|m_i\rangle \otimes |m_{ii}\rangle = |N\rangle$. Esta forma de descomponer $|N\rangle$, induce a pensar que el sistema U está compuesto por dos subsistemas con estados $|m_i\rangle$ y $|m_{ii}\rangle$. Bajo ciertas condiciones es posible definir un operador H_i que haga de Hamiltoniano de la primer partícula de modo que los vectores $|m_i\rangle$ son autoestados de dicho operador, de modo que $H_i|m_i\rangle = e_{m_i}|m_i\rangle$ mientras que los vectores $|m_{ii}\rangle$ son autoestados del operador H_{ii} de modo que $H_{ii}|m_{ii}\rangle = e_{m_{ii}}|m_{ii}\rangle$, siendo $H_i \otimes I_{ii} + I_i \otimes H_{ii} = H_U$ (para simplificar se asume que en esta descomposición no hay interacción). Consecuentemente, los valores de energía e_{m_i} y $e_{m_{ii}}$ son tales que $e_{m_i} + e_{m_{ii}} = E_N$. Los autoestados $|m_i\rangle$ y $|m_{ii}\rangle$ generan respectivamente los subespacios $\mathcal{H}_i$ y $\mathcal{H}_{ii}$ de modo que $\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_{ii} = \mathcal{H}_U$. El subespacio $\mathcal{H}_i$ representa al subsistema S_i y el subespacio $\mathcal{H}_{ii}$ al subsistema S_{ii} de modo que $S_i \cup S_{ii} = U$. De esta manera, una estructura producto tensorial representa un modo, entre muchos matemáticamente posibles, de descomponer un sistema en subsistemas.

De manera análoga, si en lugar de centrar la atención en el estado se pone el foco en los observables como hace el formalismo algebraico, es posible descomponer un sistema en subsistemas descomponiendo el álgebra de observables que lo representa en subálgebras. Considérese un sistema U con observables O_U que forman un álgebra $\mathcal{O}_U$ de modo que $O_U \in \mathcal{O}_U$. En este formalismo, el estado del sistema se representa por un funcional ρ que actúa sobre los operadores tal que $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Se propone ahora una partición $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_i \vee \mathcal{O}_{ii}$ del álgebra $\mathcal{O}_U$ tal que para cada $O_U \in \mathcal{O}_U$ se da que $O_U = O_i \otimes I_{ii} + I_i \otimes O_{ii}$ siendo I_i e I_{ii} operadores de identidad. Los observables O_i forman la subálgebra $\mathcal{O}_i$ incluida en $\mathcal{O}_U$ ($\mathcal{O}_i \subset \mathcal{O}_U$) de modo que $O_i \in \mathcal{O}_i$, mientras que los observables O_{ii} forman la subálgebra $\mathcal{O}_{ii}$

incluida en $\mathcal{O}_U$ ($\mathcal{O}_{ii} \subset \mathcal{O}_U$) de modo que $O_{ii} \in \mathcal{O}_{ii}$. Finalmente, la subálgebra $\mathcal{O}_i$ define al subsistema S_i y $\mathcal{O}_{ii}$ al subsistema S_{ii} de modo que $S_i \cup S_{ii} = U$.

En este artículo, se denomina “enfoque TPS” a una línea de investigación desarrollada por diversos autores, quienes han examinado la relatividad de ciertas nociones estrechamente ligadas al formalismo cuántico en relación con la especificación previa de una estructura producto tensorial para un sistema. Así, conceptos como el entrelazamiento o *entanglement* de los estados cuánticos o la separabilidad entre subsistemas han sido reconsiderados desde esta perspectiva con resultados notables. Harshman y Wickramasekara (2007) enfatizaron la diversidad de TPSs que un sistema puede tener, destacando aquellas que permiten que cada subsistema sea sometido tanto a transformaciones globales de simetría como a transformaciones dinámicas. Estas son denominadas por los autores como TPSs “invariantes ante simetrías” y “dinámicamente invariantes”. Estas TPSs son de especial interés porque los subsistemas definidos por ellas respetan las simetrías del grupo de Galileo y tienen una evolución dinámica unitaria.

Por su parte, Earman (2015), utilizando el formalismo algebraico, enfatizó en la relatividad y hasta en la ambigüedad de la noción de *entanglement*. Según él, el *entanglement* del estado de un sistema, definido por su álgebra de observables, es necesariamente un *entanglement* en relación con una descomposición del álgebra en subálgebras. Un estado cuántico puede estar entrelazado en relación con una descomposición específica y ser factorizable en relación con otras. Sin un criterio que defina qué descomposiciones deben ser preferidas, la noción de *entanglement*, según Earman, permanece ambigua.

Zanardi (2001) y Dugić y Jeknić (2008) se centraron en la relatividad de la noción de separabilidad entre subsistemas. Zanardi intentó evitar la ambigüedad de la noción de separabilidad eligiendo aquellas subálgebras de operadores que representan un conjunto de observables operacionalmente accesibles. Estos representan subsistemas “reales” en contraposición a subsistemas “virtuales”, cuyos observables no podrían ser medidos. Dugić y Jeknić buscaron criterios para distinguir entre subsistemas “reales” y “virtuales” desde el enfoque de la decoherencia cuántica y de la información cuántica. Sin embargo, reconocen que no

solo la noción de separabilidad entre subsistemas, sino también la noción misma de sistema debería ser relativizada.

La intrigante pregunta sobre la naturaleza de los sistemas (*what is a system?* 2006), planteada por Dugić y Jeknić, podría surgir al llevar el enfoque TPS más allá del ámbito puramente físico, considerando sus implicaciones ontológicas. Este artículo propone abordar la cuestión de la naturaleza de los sistemas de la siguiente manera: ¿Son los sistemas físicos entidades individuales o, al menos, objetos con condiciones de identidad claras, de manera que la elección de TPSS no solo sea matemáticamente viable sino también físicamente relevante? ¿O es posible que los sistemas físicos carezcan, incluso a nivel ontológico, de condiciones de identidad que permitan encontrar criterios físicos para seleccionar la partición adecuada? Más adelante, este artículo defenderá la idea de una equivalencia entre las diferentes formas de particionar el espacio de Hilbert, basándose en una ontología de propiedades posibles para sistemas cuánticos. A través de un modelo del comportamiento trans-estadístico que se introduce a continuación, se examinará la equivalencia entre una partición que “separa” fermiones ordinarios y otra que “separa” bosones compuestos o cobosones.

5. UN MODELO DE JUGUETE

En esta sección, proponemos un modelo de juguete para cuatro fermiones y dos cobosones, que puede generalizarse fácilmente a cualquier número par de fermiones. Descompondremos un sistema utilizando dos TPSS distintas. A través del primero, se derivarán subsistemas con identidad fermiónica, y mediante el segundo, subsistemas con identidad bosónica. Es importante señalar que, a diferencia de los modelos utilizados en estudios físicos previamente mencionados, nuestro modelo no se basa en un contexto experimental para evaluar las condiciones de la trans-estadística. En cambio, explora una posibilidad inherente en la formulación matemática de la teoría. Como se mostrará, una de las fortalezas del modelo podría ser su capacidad para determinar la identidad fermiónica o bosónica de un sistema total sin necesidad de alterar su estado de acuerdo con las exigencias del postulado

de simetrización (PS). Sugerimos que este modelo indica un nuevo hallazgo dentro del enfoque TPS: no solo las nociones de *entanglement* y separabilidad son relativas a la especificación previa de la partición, sino que también la noción de identidad estadística de un sistema compuesto se vuelve relativa a la TPS desde esta perspectiva.

5.1 ESTRUCTURA PRODUCTO TENSORIAL ALFA (TPS O PARTICIÓN A)

Considérese un sistema U asociado a un Hamiltoniano H con autoestados $|N\rangle$ que generan un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Los estados posibles $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ del sistema U pueden escribirse en general como:

$$|\psi\rangle = \sum_N c_N |N\rangle \quad (5)$$

En este modelo, el sistema está compuesto por cuatro partículas de spin $\frac{1}{2}$ que no interactúan entre sí, por lo que hay una partición automáticamente definida que se llamará TPS A (alfa). Para explicitar esto, se factorizan los autoestados $|N\rangle$ por medio del producto tensorial $|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes |n_3\rangle \otimes |n_4\rangle = N$. Donde $|n_1\rangle, , |n_3\rangle$ y $|n_4\rangle$ son los autoestados de los Hamiltonianos H_1, H_2, H_3 y H_4 de cada partícula respectivamente y generan los subespacios $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ y $\mathcal{H}_4$ de modo que $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_4 = \mathcal{H}_U$. El subespacio $\mathcal{H}_1$ representa al subsistema S_1 , el subespacio $\mathcal{H}_2$ al subsistema S_2 , el subespacio $\mathcal{H}_3$ al subsistema S_3 y el subespacio $\mathcal{H}_4$ al subsistema S_4 , de modo que $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = U$. Los estados posibles $|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ del subsistema S_1 se escriben como $|\psi_1\rangle = \sum_{n_1} c_{n_1} |n_1\rangle$; los estados posibles $|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$ del subsistema S_2 se escriben como

$|\psi_2\rangle = \sum_{n_2} c_{n_2} |n_2\rangle$; los estados posibles $|\psi_3\rangle \in \mathfrak{H}_3$ del subsistema S_3 se escriben como $|\psi_3\rangle = \sum_{n_3} c_{n_3} |n_3\rangle$ y los estados posibles $|\psi_4\rangle \in \mathfrak{H}_4$ del subsistema S_4 se escriben $|\psi_4\rangle = \sum_{n_4} c_{n_4} |n_4\rangle$. Los estados posibles $|\psi\rangle \in \mathfrak{H}$ del sistema U pueden ahora reescribirse del siguiente modo:

$$|\psi\rangle = \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} c_{n_1, n_2, n_3, n_4} |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes |n_3\rangle \otimes |n_4\rangle \quad (6)$$

Se define ahora una primera serie de operadores de permutación que intercambien los estados de sólo dos de los subsistemas:

$$\begin{aligned} P_{2134} |N\rangle &= |n_2\rangle \otimes |n_1\rangle \otimes |n_3\rangle \otimes |n_4\rangle \\ P_{3214} |N\rangle &= |n_3\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes |n_1\rangle \otimes |n_4\rangle \\ P_{4231} |N\rangle &= |n_4\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes |n_3\rangle \otimes |n_1\rangle \\ P_{1324} |N\rangle &= |n_1\rangle \otimes |n_3\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes |n_4\rangle \\ P_{1432} |N\rangle &= |n_1\rangle \otimes |n_4\rangle \otimes |n_3\rangle \otimes |n_2\rangle \\ P_{1243} |N\rangle &= |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes |n_4\rangle \otimes |n_3\rangle \end{aligned} \quad (7)$$

Como los subsistemas S_1 , S_2 , S_3 y S_4 son fermiones. Entonces el estado $|\psi\rangle$ del sistema total U deberá ser antisimétrico frente una permutación. Esto es

$$\begin{aligned}
P_{2134}|\psi\rangle &= -|\psi\rangle \\
P_{3214}|\psi\rangle &= -|\psi\rangle \\
P_{4231}|\psi\rangle &= -|\psi\rangle \\
P_{1324}|\psi\rangle &= -|\psi\rangle \\
P_{1432}|\psi\rangle &= -|\psi\rangle \\
P_{1243}|\psi\rangle &= -|\psi\rangle
\end{aligned} \tag{8}$$

Para asegurar que el estado $|\psi\rangle$ sea completamente antisimétrico, se deberá antisimetrizar el estado $|\psi\rangle$ por medio de un operador de antisimetrización

$$A = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \pm P_{\alpha} \tag{9}$$

que se construye a partir de todos los operadores de permutación P_{α} , los definidos en (7) junto a otros permutadores de segundo y tercer orden (ver detalles en Ballentine 1998). De este modo, A que permite antisimetrizar $|\psi\rangle$ para obtener el estado antisimétrico $|\psi_A\rangle$ que asegura la identidad fermiónica de los subsistemas S_1 , S_2 , S_3 y S_4 del sistema compuesto U . Así,

$$A|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \tag{10}$$

Y así satisfacer al postulado de indistinguibilidad PI_{st} (ec. 1), como es de esperar de un sistema de partículas indistinguibles

$$\begin{aligned}
PI_{st}: \quad \langle\psi'|O|\psi'\rangle &= \langle\psi|O|\psi\rangle \quad \text{siendo} \quad |\psi'\rangle = P|\psi\rangle \\
\langle\psi_A|P_{\alpha}^{\dagger}OP_{\alpha}|\psi_A\rangle &= (\pm 1)^2 \langle\psi_A|O|\psi_A\rangle = \langle\psi_A|O|\psi_A\rangle
\end{aligned} \tag{11}$$

Donde P_α representa a cualquier operador de permutación. Como puede apreciarse, los autovalores (1) o (-1) elevados al cuadrado tienen efecto neutro.

5.2 ESTRUCTURA PRODUCTO TENSORIAL BETA (TPS O PARTICIÓN B)

Considérese al mismo sistema U asociado al mismo un Hamiltoniano H con los mismos autoestados $|N\rangle$ que generan un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Se define ahora una nueva partición TPS B (beta) factorizando los autoestados $|N\rangle$ de un modo distinto al que se realizó en la TPS A, ahora se utiliza el producto tensorial $|m_i\rangle \otimes |m_{ii}\rangle = N$ de modo que $|m_i\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$ y $|m_{ii}\rangle = |n_3\rangle \otimes |n_4\rangle$. Las bases $|m_i\rangle$ y $|m_{ii}\rangle$ generan respectivamente los subespacios $\mathcal{H}_i$ y $\mathcal{H}_{ii}$ de modo que $\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_{ii} = \mathcal{H}_U$. El subespacio $\mathcal{H}_i$ representa al subsistema S_i y el subespacio $\mathcal{H}_{ii}$ al subsistema, de modo que $S_i \cup S_{ii} = U$. Dado que

- $|m_i\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$, se da que $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, por tanto $S_i = S_1 \cup S_2$.
- $|m_{ii}\rangle = |n_3\rangle \otimes |n_4\rangle$, se da que $\mathcal{H}_{ii} = \mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_4$, por tanto $S_{ii} = S_3 \cup S_4$.

Lo que establece una clara correspondencia entre ambas particiones. Los estados posibles $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}_i$ del subsistema S_i se escriben como $|\psi_i\rangle = \sum_{m_i} c_{m_i} |m_i\rangle$ y los estados posibles $|\psi_{ii}\rangle \in \mathcal{H}_{ii}$ del subsistema S_{ii} se escriben $|\psi_{ii}\rangle = \sum_{m_{ii}} c_{m_{ii}} |m_{ii}\rangle$

. Los estados posibles $|\psi\rangle \in \mathfrak{H}$ del sistema U pueden ahora reescribirse del siguiente modo:

$$|\psi\rangle = \sum_{m_i, m_{ii}} c_{m_i, m_{ii}} |m_i\rangle \otimes |m_{ii}\rangle \quad (12)$$

En este caso es posible definir un único operador de permutación correspondiente a la TPS B:

$$P_{ii-i} |N\rangle = |m_{ii}\rangle \otimes |m_i\rangle \quad (13)$$

Dado que $|m_i\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$ y que $|m_{ii}\rangle = |n_3\rangle \otimes |n_4\rangle$ existe también una correspondencia entre el operador P_{ii-i} y uno de los operadores de permutación de la TPS A. A saber

$$P_{ii-i} |N\rangle = |m_{ii}\rangle \otimes |m_i\rangle = |n_3\rangle \otimes |n_4\rangle \otimes |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle = P_{3214} P_{1432} |N\rangle \quad (14)$$

Por tanto,

$$P_{ii-i} = P_{3214} P_{1432} \quad (15)$$

Al considerar la partición A, se consideró que los subsistemas S_1 , S_2 , S_3 y S_4 son fermiones y por ello se antisimetrizó el estado del sistema U para obtener $|\psi_A\rangle$. Sin abandonar, en lo que sigue, dicha suposición, véase cómo actúa el operador P_{ii-i} sobre el estado antisimétrico $|\psi_A\rangle$.

$$P_{ii-i} |\psi_A\rangle = P_{3214} P_{1432} |\psi_A\rangle = |\psi_A\rangle \quad (16)$$

Este resultado es relevante ya que el mismo estado $|\psi_A\rangle$ resulta simétrico respecto al operador P_{ii-i} . De este modo, la notación que introduce el subíndice A cuando el estado es antisimétrico ($|\psi_A\rangle$) y el subíndice S cuando es simétrico ($|\psi_S\rangle$) resulta insuficiente porque este ejemplo muestra que el mismo estado puede ser simétrico o antisimétrico dependiendo de qué TPS se tome. En efecto, en nuestro ejemplo, el estado del sistema es antisimétrico si se analiza desde la TPS A pero es simétrico si se analiza desde la TPS B, es decir

$$|\psi_{A(TPSA)}\rangle = |\psi_{S(TPSA)}\rangle \quad (17)$$

Esto significa que precisamente por haber asumido que los subsistemas S_1 , S_2 , S_3 y S_4 de la partición A son fermiones se debe admitir que los subsistemas S_i y S_{ii} de la partición B se pueden identificar como bosones.

5.3 LA RELATIVIDAD DE LA NOCIÓN DE IDENTIDAD ESTADÍSTICA Y EL ESTATUTO ONTOLÓGICO DE LOS COBOSONES. CONCLUSIONES PARCIALES

El resultado anterior lleva a decir que el sistema U respecto a la TPS A es un sistema fermiónico y, al mismo tiempo, que el sistema U respecto a la TPS B es un sistema bosónico, sin necesidad de modificar su estado (*i.e.* sin volver a aplicar PS para obtener la identidad bosónica). El modelo propone que la identidad estadística de un sistema compuesto, que puede ser dividido en subsistemas indistinguibles, depende de la estructura del producto tensorial seleccionado, (o simplemente *TPS-relativa*). Esto sugiere que para cualquier sistema formado por un número par de fermiones, existe una TPS alternativa donde cada par de fermiones se considera como un único subsistema. Esta perspectiva podría añadirse a los resultados previamente derivados del enfoque TPS. Específicamente, además de la relatividad en las nociones de separabilidad y *entanglement*, ahora podríamos considerar la identidad estadística como otra propiedad relativa. Si esta interpretación es acertada, la identidad fermiónica o bosónica de un sistema que puede ser dividido en

subsistemas indistinguibles debería entenderse en términos relativos a la TPS. En este marco, las designaciones “ser fermión” y “ser bosón”, aplicables a subsistemas indistinguibles, se interpretarían como propiedades relacionales. Así, un subsistema tendría una identidad estadística específica en relación con otros subsistemas dentro de la misma partición, en lugar de poseer una identidad en un sentido más absoluto. Por lo tanto, no sería esencial considerar las propiedades de “ser fermión” o “ser bosón” como categorías fijas, y por ende, no sería necesario ajustarlas al formalismo mediante un postulado específico, como el *ad hoc* (PS).

El modelo de juguete sugiere que la condición de posibilidad del comportamiento trans-estadístico radica en esta noción de identidad estadística TPS-relativizada. De este modo, el comportamiento trans-estadístico no dependería únicamente de condiciones físicas específicas modeladas aproximadamente (*v.gr.* el grado de entrelazamiento de los estados de los fermiones de cada par), sino también de una forma de trans-estadística presente en un nivel más fundamental: la identidad cualitativa de los sistemas. Así, se podría interpretar que el comportamiento trans-estadístico no es meramente una descripción conveniente de cierto fenómeno. Este comportamiento podría estar vinculado a las condiciones bajo las cuales se establece la identidad cualitativa de los sistemas cuánticos indistinguibles, y, desde esta perspectiva, podría ser interpretado de manera realista.

Sin embargo, las conclusiones parciales que podrían derivarse del modelo de juguete basado en el enfoque TPS deben ser consideradas con cautela por el momento. Aunque el modelo logra evitar el uso reiterado de PS para obtener un sistema de bosones a partir de un sistema de fermiones, aún se basa en el formalismo de espacios de Hilbert. En este formalismo, el vector de estado identifica a un sistema cuántico, y los operadores que representan a los observables actúan en un espacio de estados ya definido. Estas particularidades del formalismo de espacios de Hilbert lo alinean con una ontología de objetos individuales que poseen propiedades inherentes. Esta ontología no permite relativizar plenamente la noción de separabilidad, y por tanto bloquea el paso hacia una noción relativizada de identidad estadística. Entre todas las TPSS disponibles, alguna debe delimitar subsistemas que coincidan con objetos que mantengan condiciones de identidad. De aquí que, para esta ontología, las TPSS que definen subsistemas más básicos tendrán prioridad. Y dado que en el modelo de juguete los vectores de estado que definen a los

subsistemas de la TPS B pueden expresarse como productos tensoriales de los vectores de estado de la TPS A (y no viceversa), la interpretación natural es que el sistema total es fermiónico y que la TPS A tiene primacía ontológica sobre la TPS B.

Por lo tanto, en esta fase de la propuesta, donde se ha presentado un modelo aún basado en el formalismo de espacios de Hilbert, la mencionada jerarquía entre TPSs nos impone conceder prioridad ontológica a los subsistemas de la TPS A, y reconsiderar lo previamente afirmado sobre el carácter relacional de la noción de identidad estadística. Los subsistemas son fermiones que pueden actuar como bosones cuando se consideran en pares; sin embargo, estos pares no son bosones genuinos, sino cobosones. En otras palabras, la identidad estadística del sistema total (fermiónica) se determina por condiciones de identidad vinculadas a los subsistemas en su individualidad, obviando las relaciones que existen entre los subsistemas dentro de un sistema compuesto. Desde una ontología de individuos, se debe afirmar: “este es un sistema de fermiones que, aunque no es un sistema de bosones, puede comportarse como tal”. Los fermiones son sistemas concretos, mientras que los cobosones son partículas meramente aparentes, en línea con lo que comúnmente se asume en el contexto físico.

No obstante, una respuesta más detallada al dilema del carácter relativo o absoluto de la identidad estadística (y, en relación a esto, al problema del estatuto ontológico de los cobosones y a la interpretación realista del comportamiento trans-estadístico) se proporcionará tras introducir la versión algebraica del modelo de juguete y su interpretación fundamentada en la ontología de propiedades, sugerida por el formalismo algebraico de la mecánica cuántica.

6. LA ONTOLOGÍA DE PROPIEDADES

La metafísica tradicional elaboró la noción ontológica de objeto individual, pertinente para los sistemas físicos clásicos. Esta noción de objeto individual se vincula con la noción semántica de referencia singular y con la noción lógica de sujeto de predicación (Laycock 2014). Por ello, la idea de objeto individual se complementa de manera inherente con la noción ontológica de propiedades. En otras palabras, un conjunto de propiedades pertenece al objeto individual y se

predica de él. Dicho objeto se distingue por poseer condiciones de identidad que lo diferencian sincrónicamente de otros objetos y permiten su reidentificación diacrónica a pesar de los cambios en sus propiedades con el tiempo. Algunos enfoques sostienen que la individualidad de un objeto se fundamenta en un principio que va más allá de las propiedades, como la sustancia (individualidad trascendental). Otros argumentan que la individualidad de un objeto radica únicamente en sus propiedades (individualidad de haz). Aquellos que ven al objeto individual como un haz de propiedades asumen el reto adicional de establecer criterios de identidad sincrónica y diacrónica basados puramente en propiedades. Para la identidad diacrónica, comúnmente se utiliza la trayectoria espacio-temporal del objeto. En cuanto a la identidad sincrónica, generalmente se adopta alguna variante del principio de identidad de indiscernibles (PII) de Leibniz. El PII sostiene que dos objetos con propiedades indistinguibles son numéricamente idénticos, es decir, deben considerarse en el ámbito ontológico como un solo objeto. Las diferentes interpretaciones del PII se derivan de considerar distintos conjuntos de propiedades (monádicas, relacionales, etc.) como esenciales para el criterio.

En la sección 2, se aludió a la indistinguibilidad de los sistemas cuánticos. La estadística que rige a los sistemas cuánticos del mismo tipo nos lleva a reconocer que, si estos sistemas son objetos en algún sentido, lo son de una manera atípica, dado que carecen de condiciones de identidad que los categoricen como individuos. Específicamente, no acatan el PII, ya que en la mecánica cuántica, sistemas con propiedades indistinguibles presentan diferencias únicamente numéricas. Además, la denominada contextualidad cuántica, que impide que todos los observables de un sistema posean valores definidos simultáneamente, desafía el tradicional principio de determinación omnimoda que se espera que cualquier objeto individual respete, y obstaculiza la posibilidad de usar la trayectoria espacio-temporal como criterio de identidad diacrónica. Finalmente, hay situaciones en las que los sistemas cuánticos infringen el principio de localidad, que se espera que todo objeto individual cumpla. Estos tres retos ontológicos propuestos por los sistemas cuánticos llevaron, incluso en las fases iniciales de la formulación de la mecánica cuántica (ver Weyl 1931), a señalar que los sistemas cuánticos no poseen condiciones de identidad típicas de objetos individuales. Esta percepción se consolidó en lo que se denomina la “visión establecida” sobre el estatus ontológico de los sistemas cuánticos, que

posteriormente condujo al desarrollo de sistemas formales alternativos para representar objetos no individuales (como la teoría de quasi-sets de Krause 1992). Recientemente, diversos autores han cuestionado la visión establecida, argumentando que la noción de objeto individual puede ser reivindicada si se descarta el PII o, al menos, algunas de sus versiones más restrictivas. Van Fraassen (1985) sugiere abandonar el principio de equiprobabilidad; French (1989) postula que los estados ni simétricos ni antisimétricos son ontológicamente viables, pero físicamente inalcanzables; Muller y Saunders (2008) exploran formas de identificar propiedades relacionales que diferencien entre fermiones. En este marco, algunos defensores de las interpretaciones modales de la mecánica cuántica han esbozado una innovadora ontología de propiedades posibles, en la que los sistemas cuánticos carecen de condiciones de identidad que definan un sujeto de predicación (ver Lombardi & Castagnino 2008; da Costa, Lombardi & Lastiri 2013; da Costa & Lombardi 2014; Lombardi & Dieks 2016). Esta propuesta se alinea con el carácter revolucionario de la visión establecida. Según esta ontología, los sistemas cuánticos no pueden ser vistos como individuos, y menos aún como objetos (ver Lombardi & Pasqualini 2022). Se discutirá cómo, en esta propuesta, la noción de separabilidad física entre sistemas no está ontológicamente predefinida, sino que emerge de estipulaciones pragmáticas en el ámbito de la física. Originalmente concebida para abordar los desafíos ontológicos tradicionales de indistinguibilidad, contextualidad y no localidad, se argumenta que esta ontología es también la más apropiada para interpretar (de manera realista) el comportamiento trans-estadístico que es el foco de este artículo.

6.1. ONTOLOGÍA DE PROPIEDADES Y FORMALISMO ALGEBRAICO

Las exposiciones habituales de la mecánica cuántica emplean el formalismo de espacios de Hilbert para la representación matemática de los sistemas físicos. Un espacio de Hilbert se estructura a partir de un conjunto de vectores complejos, donde cada vector simboliza un estado posible. Los observables físicos se representan mediante operadores que actúan sobre los vectores de estado ya establecidos. Esta primacía lógica del espacio de estados sobre los operadores que

simbolizan los observables apunta a una ontología de individuos en la que los sistemas se definen por su espacio de estados y se identifican por su vector de estado. Posteriormente, adquieren las propiedades asociadas a los operadores (ver Ballentine 1998 234-235).

Sin embargo, también es posible emplear en cuántica el formalismo algebraico, matemáticamente equivalente al anterior. En este formalismo, los sistemas cuánticos son inmediatamente representados por un álgebra de operadores que representan a sus observables. Los estados cuánticos se representan por medio de funcionales que actúan sobre los operadores previamente definidos. En este caso, la prioridad lógica de los operadores representantes de los observables por sobre el funcional representante del estado sugiere una ontología de propiedades en que los sistemas cuánticos vienen inmediatamente definidos por sus propiedades, correspondientes con los operadores, sin sustrato alguno. El estado del sistema carece de correlato ontológico, siendo meramente un dispositivo matemático que codifica las distribuciones de probabilidades entre valores posibles correspondientes a cada observable (Ballentine 1998 48).

Para ser más específicos, la ontología de propiedades posibles se define a través de las siguientes correspondencias semánticas (ver Lombardi & Pasqualini 2022):

- El álgebra de *operadores autoadjuntos* representa al conjunto de los *observables físicos* que definen a un sistema cuántico, que a su vez se corresponde con el conjunto de *instancias de propiedades-tipo universales posibles* en el dominio ontológico.
- Los *autovalores* de los operadores autoadjuntos representan *posibles valores físicos*, que a su vez se corresponden con el conjunto de *propiedades-caso posibles* pertenecientes a cada propiedad-tipo.
- Las *funciones de probabilidad* representan *distribuciones de probabilidad* para cada observable físico, que a su vez se corresponden con las *propensiones ontológicas* de actualización de cada posible propiedad-caso.
- Los *funcionales* sobre el álgebra de observables representan *estados físicos*. Son simples dispositivos que asignan una distribución de probabilidad a cada observable de un sistema singular y, por tanto, desde el punto de vista

ontológico codifican las propensiones ontológicas para todas las posibles propiedades-caso del sistema.

Cabe destacar que se alude a propiedades posibles, dado que, como se mencionó, esta ontología se concibió en el contexto de las interpretaciones modales, donde la categoría de posibilidad tiene contenido ontológico. Sin embargo, nada impide su aplicación fuera de las interpretaciones modales. En esta ontología, los sistemas cuánticos se consideran haces de propiedades posibles. Esta propuesta se alinea con el enfoque tradicional de la individualidad de haz, pero con la distinción significativa de que, a diferencia de la teoría tradicional del haz de propiedades actuales, no se busca imponer sobre las propiedades las condiciones de identidad propias de los objetos individuales. Además de los retos que presenta el tratamiento ontológico de sistemas indistinguibles, un sistema cuántico no podría ser considerado un haz de propiedades actuales debido a las limitaciones asociadas a la contextualidad cuántica, claramente establecidas en el teorema de Kochen y Specker (1967). Por el contrario, esta ontología busca intencionadamente dismantelar cualquier condición de identidad con fundamento ontológico. En cuanto a propiedades posibles, el PII no es incorrecto; simplemente no es aplicable, ya que no hay impedimento para que exista diferencia numérica entre dos objetos formales con propiedades posibles idénticas. Para diferenciar más claramente de la teoría del haz tradicional, se ha adoptado el término “cúmulo” de propiedades posibles para referirse en el ámbito ontológico a los sistemas cuánticos (Lombardi & Pasqualini 2022).

Como se observa, la imagen convencional de los sistemas cuánticos como partículas con condiciones de identidad relativamente estables resulta diametralmente opuesta a la imagen de los sistemas cuánticos que proporciona esta ontología. Según ella, los subsistemas cuánticos, considerados individualmente, no poseen condiciones de identidad que se mantengan al integrarse en compuestos. Los cúmulos de propiedades pueden agregarse para formar nuevos cúmulos, sin que los originales puedan ser reidentificados. A su vez, un cúmulo puede desglosarse de diversas formas, sin que ninguna tenga preeminencia ontológica. Específicamente, retomando lo abordado desde el enfoque TPS mencionado previamente, si un sistema puede ser matemáticamente dividido de varias maneras, la ontología no

favorece ninguna división como representativa de condiciones de identidad que establezcan referencias singulares destacadas. La distinción entre sistemas “reales” y “virtuales” se atenúa. Esta ontología, por lo tanto, brinda un sentido ontológico claro a una noción de separabilidad completamente relativizada, conforme lo sugiere el enfoque TPS. De los postulados de esta ontología no se deriva ni la perspectiva atomista tradicional, donde toda realidad física se construye *bottom-up* desde sistemas elementales con condiciones de identidad absolutas, ni una visión holística, *top-down*, donde la identidad de las partes se relativiza completamente a las propiedades del conjunto. Esto no obstaculiza que, en la práctica física y en las interpretaciones de la mecánica cuántica, sea conveniente utilizar ciertas particiones en lugar de otras, estableciendo condiciones de identidad relativamente estables para determinados sistemas. Sin embargo, desde esta ontología, tal preferencia por ciertas divisiones no tiene fundamento ontológico, sino que resulta de estipulaciones orientadas a objetivos prácticos o interpretativos.

6.2. ONTOLOGÍA DE PROPIEDADES E INDISTINGUIBILIDAD

Desde una ontología de propiedades, donde los sistemas cuánticos se definen no por su espacio de estados o por su vector de estado, sino por sus propiedades-tipo y propiedades-caso posibles, es necesario reformular el postulado estándar de indistinguibilidad. En este contexto, son los observables cuánticos los que deben ser invariantes frente a los operadores de permutación disponibles. Esta reformulación recibe el nombre de principio de indistinguibilidad sobre observables PI_{obs} :

PI_{obs} : Si los operadores O representan a los observables del sistema compuesto cuyos subsistemas son indistinguibles, entonces el valor medio de cualquier observable representado por un operador O debe ser el mismo para O y para cualquier permutación O' .

$$PI_{\text{obs}}: \langle \psi | O' | \psi \rangle = \langle \psi | O | \psi \rangle \text{ siendo } O' = P^\dagger O P \quad (18)$$

Para satisfacer PI_{obs} ya no hay necesidad de simetrizar o antisimetrizar el estado del sistema sino directamente simetrizar los observables del sistema. PS reformulado se lee:

PS_{obs} : Un sistema de múltiples partículas idénticas debe ser representando por un álgebra de operadores simétricos $O_{\text{sim}} \in \mathcal{O}_{\text{sim}}$, donde la simetría queda definida en términos de los operadores de permutación P .

$$O' = P^\dagger O P = (\pm 1)^2 O = O_{\text{sim}} \quad (19)$$

Esta condición impuesta a los observables incluye tanto bosones como fermiones. Resulta fácil reconocer esto si se remite a la restricción que se suele imponer a los estados. En el caso de los bosones se pide que la función de onda sea simétrica, es decir

$$|\psi_S\rangle = P|\psi_S\rangle \quad (20)$$

de modo que

$$\langle \psi_S | O_{\text{sim}} | \psi_S \rangle = \langle \psi_S | P^\dagger O P | \psi_S \rangle = \langle \psi_S | O | \psi_S \rangle \quad (21)$$

Y en el caso de los fermiones se tiene que $|\psi_A\rangle = -P|\psi_A\rangle$, de modo que

$$\langle \psi_A | O_{\text{sim}} | \psi_A \rangle = \langle \psi_A | P^\dagger O P | \psi_A \rangle = (-\langle \psi_A |) O (-|\psi_A\rangle) = \langle \psi_A | O | \psi_A \rangle \quad (21)$$

Así, la condición expresada en (19) que define a los observables simétricos O_{sim} incluye ambos casos. Para obtener observables con una identidad estadística definida deberán aplicarse operadores de simetrización S (para el caso de bosones) o antisimetrización A (para el caso de fermiones) a los observables

$$\begin{aligned} S^\dagger OS &= O_B \\ A^\dagger OA &= O_F \end{aligned} \quad (22)$$

Los operadores simétricos O_B forman el álgebra bosónica $\mathcal{O}_B$, mientras que los operadores simétricos O_F forman el álgebra fermiónica $\mathcal{O}_F$. Cabe aclarar que los operadores O_F , aunque hayan sido resultado de aplicar un operador de antisimetrización, resultan simétricos y no antisimétricos ya que, al aplicarles operadores de permutación, el posible autovalor (-1) aparece elevado al cuadrado. Esto es

$$P^\dagger O_F P = (\pm 1)^2 O_F = O_F \quad (23)$$

Se obtienen así los valores medios esperados para sistemas bosónicos o fermiónicos sin necesidad de simetrizar o antisimetrizar el estado

$$\begin{aligned} \langle O \rangle_{|\psi_S\rangle} &= \langle \psi_S | O | \psi_S \rangle = \langle \psi | S^\dagger OS | \psi \rangle = \langle \psi | O_B | \psi \rangle = \langle O_B \rangle_{|\psi\rangle} = \text{Tr}(\rho O_B) \\ \langle O \rangle_{|\psi_A\rangle} &= \langle \psi_A | O | \psi_A \rangle = \langle \psi | A^\dagger OA | \psi \rangle = \langle \psi | O_F | \psi \rangle = \langle O_F \rangle_{|\psi\rangle} = \text{Tr}(\rho O_F) \end{aligned} \quad (24)$$

Desde esta perspectiva ontológica, el postulado de simetrización deja de ser una adición *ad hoc* y se fundamenta ontológicamente. Cuando dos o más cúmulos de propiedades posibles idénticas se agregan para formar un único cúmulo, es natural esperar que el cúmulo resultante sea simétrico. Es decir, que los observables simétricos del sistema compuesto no hagan distinciones entre un subsistema y otro. Por ejemplo, consideremos dos cúmulos h^1 y h^2 definidos por distintas instancias de álgebras de observables idénticas $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ de modo que $h^1 \sqsubseteq h^2$, siendo $\sqsubseteq$ la relación de indistinguibilidad. Los índices 1 y 2 no suponen aquí individualidad y

podrían ser arbitrariamente intercambiados. Estos dos cúmulos se agregan en un nuevo cúmulo compuesto h^U tal que $h^U = h^1 * h^2$, siendo $*$ la operación de agregación. El álgebra $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_1 \vee \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_2 \vee \mathcal{O}_1$ definirá al cúmulo h^U . Enseguida, la restricción sobre los observables $O_U \in \mathcal{O}_U$ exigida por PS_{obs} debe ser llevada a cabo, con objeto de que los observables $O_U = \sum_{ij} k_{ij} (O_{1i} \otimes O_{2j})$ sean tales que $O_{1i} \otimes O_{2j} = O_{2i} \otimes O_{1j}$, es decir, resulten invariantes frente a la permutación de los cúmulos h^1 y h^2 (ver Fortin & Lombardi 2021).

7. VERSIÓN ALGEBRAICA DEL MODELO

Introducido el formalismo algebraico junto con la ontología de propiedades que le es connatural, se presenta a continuación la versión algebraica del modelo de juguete presentado en sección 5. Considérese un sistema U con observables O_U pertenecientes al álgebra $\mathcal{O}_U$. El estado del sistema U será el genérico $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ (sin simetrizar o antisimetrizar).

Se introduce la partición A (TPS A) $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_1 \vee \mathcal{O}_2 \vee \mathcal{O}_3 \vee \mathcal{O}_4$ del álgebra $\mathcal{O}_U$ tal que para cada $O_U \in \mathcal{O}_U$ se da que

$$O_U = \sum_{ijkl} k_{ijkl} (O_{1i} \otimes O_{2j} \otimes O_{3k} \otimes O_{4l}) \quad (25)$$

Los observables O_1 pertenecen a la subálgebra $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_U$; los observables O_2 pertenecen a la subálgebra $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_U$; los observables O_3 pertenecen a la subálgebra $\mathcal{O}_3 \subset \mathcal{O}_U$ y los observables O_4 pertenecen a la subálgebra $\mathcal{O}_4 \subset \mathcal{O}_U$. Finalmente, las subálgebras $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_3$ y $\mathcal{O}_4$ definen respectivamente a los subsistemas S_1 , S_2 , S_3 y S_4 de modo que $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = U$.

Consecuentemente, los operadores de permutación de primer orden para esta partición se pueden definir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 P_{2134}^\dagger O_U P_{2134} &= \sum_{ijkl} k_{ijkl} (O_{2i} \otimes O_{1j} \otimes O_{3k} \otimes O_{4l}) \\
 P_{3214}^\dagger O_U P_{3214} &= \sum_{ijkl} k_{ijkl} (O_{3i} \otimes O_{2j} \otimes O_{1k} \otimes O_{4l}) \\
 P_{4231}^\dagger O_U P_{4231} &= \sum_{ijkl} k_{ijkl} (O_{4i} \otimes O_{2j} \otimes O_{3k} \otimes O_{1l}) \\
 P_{1324}^\dagger O_U P_{1324} &= \sum_{ijkl} k_{ijkl} (O_{1i} \otimes O_{3j} \otimes O_{2k} \otimes O_{4l}) \\
 P_{1432}^\dagger O_U P_{1432} &= \sum_{ijkl} k_{ijkl} (O_{1i} \otimes O_{4j} \otimes O_{3k} \otimes O_{2l}) \\
 P_{1243}^\dagger O_U P_{1243} &= \sum_{ijkl} k_{ijkl} (O_{1i} \otimes O_{2j} \otimes O_{4k} \otimes O_{3l})
 \end{aligned} \tag{26}$$

Se introduce la partición B (beta) $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_i \vee \mathcal{O}_{ii}$ del álgebra $\mathcal{O}_U$ tal que para cada $O_U \in \mathcal{O}_U$ se da que $O_U = \sum_{mn} k_{mn} (O_{im} \otimes O_{in})$. Los observables O_i pertenecen a la subálgebra $\mathcal{O}_i$, mientras que los observables O_{ii} pertenecen a la subálgebra $\mathcal{O}_{ii}$. Las subálgebras $\mathcal{O}_i$ y $\mathcal{O}_{ii}$ definen a los subsistemas S_i y S_{ii} respectivamente, de modo que $S_i \cup S_{ii} = U$. Finalmente, el álgebra $\mathcal{O}_i$ tiene como subálgebras a las ya conocidas $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ de modo que $S_i = S_1 \cup S_2$, *i. e.* $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_1 \vee \mathcal{O}_2$; y $\mathcal{O}_{ii}$ tiene como subálgebras a $\mathcal{O}_3$ y $\mathcal{O}_4$ de modo que $S_{ii} = S_3 \cup S_4$; *i. e.* $\mathcal{O}_{ii} = \mathcal{O}_3 \vee \mathcal{O}_4$.

El único operador de permutación correspondiente a esta partición es:

$$P_{ii-i}^\dagger O_U P_{ii-i} = \sum_{mn} k_{mn} (O_{im} \otimes O_{in}) \tag{27}$$

Dado que $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_1 \vee \mathcal{O}_2$ y que $\mathcal{O}_{ii} = \mathcal{O}_3 \vee \mathcal{O}_4$, existe una correspondencia entre el operador P_{ii-i} y uno de los operadores de permutación de la partición Λ . A saber

$$\sum_{mn} k_{mn} (O_{im} \otimes O_{in}) = \sum_i k_{ijkl} (O_{3i} \otimes O_{4j} \otimes O_{1k} \otimes O_{2l}) \quad (28)$$

$$P_{ii-i}^\dagger O_U P_{ii-i} = P_{3214}^\dagger P_{1432}^\dagger O_U P_{1432} P_{3214}$$

Por tanto,

$$P_{ii-i} = P_{1432} P_{3214} \quad (29)$$

Si se asume que los subsistemas S_1 , S_2 , S_3 y S_4 son indistinguibles entre sí, debería darse, de modo de satisfacer PI_{obs}

$$\forall O_U \in \mathcal{O}_U, O_U = P_\alpha^\dagger O_U P_\alpha \quad (30)$$

Si adicionalmente se asume que S_1 , S_2 , S_3 y S_4 son fermiones, y de modo de asegurar que los observables que representen al sistema U cumplan la condición establecida en la ec. 30, se deberá aplicar el ya definido operador de antisimetrización A a los observables O_U

$$\forall O_F \in \mathcal{O}_F, O_F = A^\dagger O_U A \quad (31)$$

Se obtiene así el álgebra $\mathcal{O}_F$ que representa al sistema U compuesto de cuatro fermiones S_1 , S_2 , S_3 y S_4 . La operación es análoga a aplicar el operador de antisimetrización A al estado. El PI_{obs} resulta satisfecho por esta álgebra ya que

$$\begin{aligned} \text{PI}_{\text{obs}}: \quad \langle \psi | O' | \psi \rangle &= \langle \psi | O | \psi \rangle \quad \text{siendo } O' = P^\dagger O P \\ \langle \psi | P_\alpha^\dagger O_F P_\alpha | \psi \rangle &= (\pm 1)^2 \langle \psi | O_F | \psi \rangle = \langle \psi | O_F | \psi \rangle \end{aligned} \quad (32)$$

Asúmase ahora que los subsistemas S_i y S_{ii} son también indistinguibles entre sí, debería darse, para satisfacer PI_{obs}

$$\forall O_U \in \mathcal{O}_U, O_U = P_{ii-i}^\dagger O_U P_{ii-i} \quad (33)$$

Si adicionalmente se asume que S_i y S_{ii} son bosones, y de modo de asegurar que los observables que representen al sistema U cumplan la condición establecida en la ec. 33, se debería aplicar un operador de simetrización $\tilde{S}$ a los observables O_U . El operador de simetrización $\tilde{S}$ se define

$$\tilde{S} = \frac{1}{2}(I + P_{ii-i}) \quad (34)$$

Se obtendría un álgebra de observables $\tilde{\mathcal{O}}_B$ tal que

$$\forall \tilde{O}_B \in \tilde{\mathcal{O}}_B, \tilde{O}_B = \tilde{S}^\dagger O_U \tilde{S} \quad (35)$$

Sin embargo, si se hace uso de este operador, se obtendría un resultado indeseable, que es obtener un álgebra de observables $\tilde{\mathcal{O}}_B$ que definiría a U como un sistema distinto del definido anteriormente por el álgebra $\mathcal{O}_F$. Ya no se hablaría de dos particiones distintas de un mismo sistema compuesto sino de dos sistemas compuestos distintos. Sería el equivalente en el formalismo de espacios de Hilbert a simetrizar el estado respecto exclusivamente al operador P_{ii-i} , pero se perderían las simetrías y antisimetrías respecto de los operadores P_α .

La manera de encontrar un álgebra de observables adecuada, que satisfaga la ec. 33 sin dejar de satisfacer la ec. 30, es definir un álgebra $\mathcal{O}_B = \mathcal{O}_F$ haciendo uso del mismo operador de antisimetrización A . El álgebra buscada es

$$\forall O_B \in \mathcal{O}_B, O_B = A^\dagger O_U A \quad (36)$$

Esto es perfectamente posible, ya que se demostró que la acción del operador A debe entenderse como una antisimetrización desde la partición A pero como una antisimetrización desde la partición B. Se obtiene así el álgebra $\mathcal{O}_B$ que representa al sistema U compuesto de dos bosones S_i y S_{ii} . El PI_{obs} resulta satisfecho por esta álgebra ya que

$$\begin{aligned} \text{PI}_{\text{obs}}: \langle \psi | O' | \psi \rangle &= \langle \psi | O | \psi \rangle \text{ siendo } O' = P^\dagger O P \\ \langle \psi | P_{ii-i}^\dagger O_B P_{ii-i} | \psi \rangle &= (1)^2 \langle \psi | O_B | \psi \rangle = \langle \psi | O_B | \psi \rangle \end{aligned} \quad (37)$$

Como primer corolario se obtiene que una misma álgebra $\mathcal{O}_B = \mathcal{O}_F$ obtenida a partir del operador de antisimetrización A define al sistema U como fermiónico o bosónico no en términos absolutos sino respecto a una determinada partición, a saber, U es fermiónico respecto a la partición A y bosónico respecto a B. Esto invita a cambiar la notación, para poner de relieve esta relatividad de la identidad estadística respecto a la partición. En lugar de $\mathcal{O}_B$ se dirá $\mathcal{O}_B^B$, y en lugar de $\mathcal{O}_F$ se escribirá $\mathcal{O}_A^F$. Un resultado análogo habíamos obtenido por medio de la versión en espacios de Hilbert del modelo, en la que para un sistema total representado por un mismo vector de estado $|\psi_A\rangle$ obteníamos tanto la identidad fermiónica como bosónica.

El segundo corolario es que el uso del operador de antisimetrización A para obtener el álgebra $\mathcal{O}_B = \mathcal{O}_F$ no necesariamente debe inducir a pensar que el sistema U es fundamentalmente fermiónico y que la partición A tiene prioridad

ontológica respecto a la B. Sino que el uso del operador de antisimetrización A puede interpretarse como una cierta restricción sobre el álgebra de observables, de las muchas posibles, que definen una cierta subálgebra y de ese modo define un cierto conjunto de subsistemas. Esta restricción es el análogo en el espacio de observables que desde otro punto de vista podría introducirse a partir de una restricción de los estados accesibles al sistema. En concreto la restricción reside en limitar los estados posibles del sistema a aquellos estados que siendo simétricos en la partición B, se conviertan en antisimétricos vistos desde la partición A.

Este resultado emerge como una posibilidad latente sólo en la versión algebraica. A saber, contamos con un álgebra $\mathcal{O}_{sim}$ constituida por operadores $O_{sim} = S^\dagger O_U S$ que se adapta perfectamente al cómputo de valores medios tanto para la partición fermiónica como la bosónica y que no podría ser considerada fermiónica en absoluto (ya que se emplea el operador de simetrización S) ni bosónica en absoluto ya que S se construye sobre la base de los operadores de permutación de la partición fermiónica.

8. CONCLUSIONES

La adopción de una ontología de propiedades sugerida por el formalismo algebraico de la mecánica cuántica permite levantar la medida de prudencia que había obligado a suspender las conclusiones parciales derivadas de la versión en espacios de Hilbert del modelo de juguete. La equivalencia ontológica de la pluralidad de TPSs a partir de una ontología en que los (sub)sistemas cuánticos no pueden ser considerados objetos con condiciones de identidad que puedan preservarse al ser particionados o al entrar en composición, impide la interpretación convencional que fundamenta la identidad estadística de un sistema compuesto en ciertas propiedades intrínsecas de aquellos subsistemas definidos por una TPS privilegiada, que delimita sistemas considerados elementales. Desde esta ontología, al habilitar una noción de separabilidad TPS -relativizada, se posibilita también una noción de identidad estadística TPS -relativizada.

Los subsistemas indistinguibles ya no son, en un sentido estricto, ni fermiones ni bosones, pero sí en sentido relativo. Es decir, la identidad estadística del sistema compuesto no depende ya de condiciones de identidad de cada subsistema numéricamente distinto considerado individualmente, sino que se atribuye al sistema compuesto en relación con una TPS específica y a cada subsistema en relación con el resto de los subsistemas de la partición. Recuérdese que adoptar una ontología de propiedades supone asumir un enfoque *top-down*, donde comenzamos con el sistema total como cúmulo único de propiedades, atenuando la noción de elementalidad. La identidad estadística del sistema total se determinará por las propiedades relacionales mutuas de los subsistemas definidos por cada TPS.

Desde la ontología de propiedades puede finalmente decirse: “este es un sistema de fermiones respecto a la partición A y es un sistema de bosones respecto a la partición B”. Al relativizar la identidad fermiónica o bosónica, se facilita una interpretación realista del comportamiento trans-estadístico. En una ontología de individuos, el comportamiento bosónico de un sistema de fermiones solo podía ser aparente. Sin embargo, desde una ontología de propiedades, el comportamiento trans-estadístico de un sistema que es fermiónico o bosónico de manera TPS -relativa ya no depende únicamente de circunstancias físicas específicas y puede tener un fundamento ontológico, vinculado a las condiciones bajo las cuales se establece la identidad cualitativa de los sistemas. Además, los cobosones resultan ser tan reales como los fermiones que los constituyen, y su estatus ontológico se equipara al de los bosones convencionales.

RECONOCIMIENTOS

Agradecemos a Olimpia Lombardi por sus consejos y su inestimable ayuda. Esta investigación fue parcialmente financiada por las becas: “The Cosmological Origin of the Arrow of Time”, de la John Templeton Foundation; “Mecánica cuántica: interpretación y relaciones interteóricas” de la Universidad de Buenos Aires; “Relaciones interteóricas entre la mecánica cuántica y otros dominios teóricos” de la Universidad Austral; y “La interpretación de la mecánica cuántica y de sus relaciones con otros dominios teóricos y disciplinares” de la Agencia de Promoción Científica y Tecnológica.

REFERENCIAS

- Avancini, S., Marinelli, J. R. y Krein, G. “Compositeness Effects in the Bose–Einstein Condensation”. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 36.34 (2003): 9045-9052. <<https://www.doi.org/10.1088/0305-4470/36/34/307>>
- Ballentine, Leslie. *Quantum Mechanics: A Modern Development*. Singapore: World Scientific, 1998.
- Belkhir, Lotfi. y Randeria, Mohit. “Collective Excitations and the Crossover from Cooper Pairs to Composite Bosons in the Attractive Hubbard Model”. *Physical Review B: Condensed Matter* 45.9 (1992): 5087. <<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.45.5087>>
- Brooks, James S. y Donnelly, Russell J. “The Calculated Thermodynamic Properties of Superfluid Helium-4”. *Journal of Physical and Chemical Reference Data* 6.1 (1977): 51-104. <<https://doi.org/10.1063/1.555549>>
- Butterfield, Jeremy. “Interpretation and Identity in Quantum Theory”. *Studies in History and Philosophy of Science* 24.3 (1993): 443-476. <[https://doi.org/10.1016/0039-3681\(93\)90037-K](https://doi.org/10.1016/0039-3681(93)90037-K)>
- Chudzicki, Christopher., Oke, Olufolajimi., y Wootters, William K. “Entanglement and Composite Bosons”. *Physical Review Letters* 104 (2010): 070402-070402.
- Combescot, M. y Tanguy, C. “New Criteria for Bosonic Behavior of Excitons”. *Europhysics Letters* 55.3 (2001): 390-396. <<https://doi.org/10.1209/epl/i2001-00427-7>>
- Cuestas, Eloisa., Bouvrie, P. Alexander., y Majtey, Ana P. “Fermionic versus Bosonic Behavior of Confined Wigner Molecules”. *Physical Review A* 101 (2020): 033620 <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.101.033620>>
- da Costa, Newton., y Lombardi, Olimpia. “Quantum Mechanics: Ontology without Individuals”. *Foundations of Physics: An International Journal Devoted to the Conceptual Bases and Fundamental Theories of Modern Physics* 44 (2014): 1246-1257. <<https://doi.org/10.1007/s10701-014-9793-1>>
- da Costa, Newton., Lombardi, Olimpia., y Lastiri, Mariano. “A Modal Ontology of Properties for Quantum Mechanics”. *Synthese* 190.17 (2013): 3671-3693. <<https://www.jstor.org/stable/24019905>>

- Dugić, M., y Jeknić, J. “What is ‘system’: Some Decoherence-Theory Arguments”. *International Journal of Theoretical Physics* 45 (2006): 2215–2225. <<https://doi.org/10.1007/s10773-006-9186-0>>
- Dugić, M. y Jeknić-Dugić, J. “What is «system»: The Information-theoretic Arguments”. *International Journal of Theoretical Physics* 47 (2008): 805–813. <<https://doi.org/10.1007/s10773-007-9504-1>>
- Earman, John. “Some Puzzles and Unresolved Issues about Quantum Entanglement”. *Erkenntnis* 80.1 (2015): 303–337. <<https://doi.org/10.1007/s10670-014-9627-8>>
- Fortin, Sebastian y López, Cristian. “Problemas ontológicos de la mecánica cuántica”. *Diccionario Interdisciplinar Austral*. Eds. Claudia E. Vanney, Ignacio Silva y Juan F. Franck, 2016. *Online*. <http://dia.austral.edu.ar/Problemas_ontologicos_de_la_mecanica_cuantica>
- Fortin, Sebastián., y Lombardi, Olimpia. “*Entanglement* and Indistinguishability in a Quantum Ontology of Properties”. [Preprint] (2021): *Online*. <<http://philsci-archive.pitt.edu/19257/>>
- French, Steven. “Identity and Individuality in Classical and Quantum Physics”. *Australasian Journal of Philosophy* 67.4 (1989): 432–446. <<https://doi.org/10.1080/00048408912343951>>
- Gigena, N., y Rossignoli, R. “*Entanglement* in Fermion Systems”. *Physical Review A* 92 (2015): 042326. <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.92.042326>>
- Harshman, N. L., y Wickramasekara, S. “Tensor Product Structures, Entanglement, and Particle Scattering”. *Open Systems and Information Dynamics* 14.3 (2007): 341–351. <<https://doi.org/10.1007/s11080-007-9057-z>>
- Kochen, Simon y Specker, E. “The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics”. *Journal of Mathematics and Mechanics* 17.1 (1967): 59–87 <<https://doi.org/10.1512/iumj.1968.17.17004>>
- Krause, Décio. “On a Quasi-set Theory”. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 33.3 (1992): 402–411. <<http://dx.doi.org/10.1305/ndjfl/1093634404>>
- Law, C. K. “Quantum *entanglement* as an Interpretation of Bosonic Character in Composite Two-particle Systems”. *Physical Review A* 71.3 (2005): 034306. <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.71.034306>>

- Laycock, Henry. "Object." *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2014 Edition). Ed. Edward N. Zalta. Stanford, Stanford University, 2017. <<https://plato.stanford.edu/archives/win2014/entries/object/>>
- Lombardi, Olimpia. y Castagnino, Mario. "A Modal-Hamiltonian Interpretation of Quantum Mechanics". *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 39 (2008): 380-443. <<https://doi.org/10.1016/j.shpsb.2008.01.003>>
- Lombardi, Olimpia., y Pasqualini, Matías Daniel. "La controversia acerca de la identidad en su ingreso al ámbito de la mecánica cuántica". *Ideas y Valores* 71.8 (2022): 138-164. <<https://doi.org/10.15446/ideasyvalores.v71n8Supl.102872>>
- Lombardi, Olimpia. y Dieks, Dennis. "Particles in a Quantum Ontology of Properties". *Metaphysics in Contemporary Physics*. Eds. Tomasz Bigaj., y Christian Wüthrich. Leiden: Brill-Rodopi, 2016. 123-143. <https://doi.org/10.1163/9789004310827_007>
- Muller, F. A., y Saunders, S. "Discerning Fermions". *The British Journal for the Philosophy of Science* 59.3 (2008): 499–548. <<http://dx.doi.org/10.1093/bjps/axn027>>
- Rombouts, S, Van Neck, D., Peirs, K. y Pollet, L. "Comment on New criteria for Bosonic Behavior of Excitons by M. Combescot and C. Tanguy". *Europhysics Letters* 63.5 (2003): 785. <<https://doi.org/10.1209/epl/i2003-00589-8>>
- Tichy, Malte C., Bouvrie, Alexander P., y Mølmer, Klaus. "How Bosonic is a Pair of Fermions?" *Appl. Phys. B* 117 (2014): 785-796. <<https://doi.org/10.1007/s00340-014-5819-9>>
- van Fraassen, Bas. "Statistical Behaviour of Indistinguishable Particles: Problems of Interpretation". *Recent Developments in Quantum Logic*. Eds. Mittelstaedt, Peter. y Stachow, Ernst-Walther. Mannheim, 1985. 161-187.
- Weyl, Hernan. *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*. London: Methuen and Co., English trans., 2nd edition, 1931.
- Zanardi, Paolo. "Virtual Quantum Systems". *Physical Review Letters* 87.7 (2001): 077901. <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.077901>>