

# VERDAD, PRUEBA Y PAPEL TORNASOL<sup>1,2</sup>

## TRUTH, PROOF AND LITMUS PAPER

María José Frápolli<sup>3</sup>

### RESUMEN

En el presente artículo se analiza la cuestión de si la verdad matemática o, en general, la verdad en las ciencias formales puede identificarse con la prueba que permite la aseveración de contenidos en estas ciencias. La respuesta que se defiende es negativa, y se argumenta explicitando el significado de la noción de verdad de acuerdo con la teoría prooracional. Las oraciones en las que ocurren términos veritativos como “verdad” o “verdadero” funcionan como variables proposicionales complejas del lenguaje natural. A estas oraciones las llamamos prooraciones. Los actos de habla en los que las prooraciones ocurren carecen de contenido en aislamiento y solo lo adquieren por referencia anafórica o catafórica a un acto de habla asertivo realizado con éxito. En el artículo se distingue entre los criterios que dan derecho para aseverar un contenido matemático y el significado de la noción de verdad aplicada a un contenido matemático. La prueba es un criterio de aseveración, uno entre otros como asumen filósofos como Putnam o Maddy. El significado de la noción de verdad es independiente de los criterios y se mantiene estable en todos sus usos.

**Palabras clave:** verdad, prueba, criterios de aseveración, definición de verdad, prooración

### ABSTRACT

The present paper analyzes the question whether mathematical truth or, in general, truth in formal sciences can be identified with the proofs that would entitle an agent to assert contents belonging to these sciences. A negative answer, resting on the meaning of the notion of truth, is defended. Sentences in which terms such as “true”, “truly” or “truth” occur work as complex propositional variables, which we call prosentences. Speech acts in which prosentences occur lack content in isolation; such content they acquire when anaphorically linked to a successful assertive speech act. The paper establishes a distinction between the criteria that entitles to assert a mathematical content and the definition of the notion of truth. Proofs are among the assertion criteria, as Putnam and Maddy assume. The meaning of truth is independent of criteria and is stable in all its uses.

**Key words:** truth, proof, assertion criteria, definition of truth, prosentence

1 Recibido: 6 de enero de 2014. Aceptado: 28 de enero de 2014.

2 Varias personas han leído versiones previas de este trabajo y han hecho comentarios que me han resultado útiles. Exproso por ello mi agradecimiento a Martín Andor, Ángela Bejarano, Camino Cañón, Raymundo Morado, Manuel de Pinedo y Nefalí Villanueva. Una versión previa de este artículo se presentó el 7 de noviembre de 2013 en la Facultad de Filosofía y Letras de la UNAM. El trabajo se ha realizado gracias al apoyo del Ministerio de Ciencia e Innovación del Gobierno de España a través del proyecto FFI2010-15704 y de la Consejería de Innovación de la Junta de Andalucía a través del proyecto HUM-04099.

3 Universidad de Granada, España: <http://www.ugr.es/~frapolli/>

## 1.

¿Se puede defender la identificación de la verdad matemática con la prueba? ¿Tiene sentido hablar de verdades en matemáticas que no hayan sido demostradas o que no puedan serlo? El debate acerca de la relación entre las nociones de verdad (matemática) y prueba es posiblemente tan viejo como la filosofía. En el pasado siglo, autores de la talla de Tarski, Benacerraf, Quine y Putnam dedicaron trabajos ya clásicos a explicar sus puntos de vista sobre las relaciones entre verdad y demostración, y se detuvieron a exponer las deficiencias de las posiciones alternativas. Para participar en el debate se requiere al menos familiaridad con las nociones involucradas, y si bien la noción de prueba, o de demostración, no parece inaccesible al tratamiento teórico, aunque puedan proponerse diferentes aproximaciones, con la noción de verdad las cosas han sido más complicadas.

A las dificultades relativas a su definición se une el hecho de que la discusión acerca de la verdad matemática vincula cuestiones metafísicas y epistemológicas nucleares que en general están deficientemente definidas y acotadas, cuestiones tales como la existencia de los objetos abstractos y las facultades de la mente humana para acceder a ámbitos de conocimiento no empírico.

Si esto no bastara para desalentar a cualquiera, a todas estas dificultades se añade la cuestión semántica de determinar cómo significan las oraciones de contenido matemático y si su modo de significar es asimilable al modo que consideramos obvio respecto de oraciones de similar estructura gramatical pero contenido empírico (véase, por ejemplo, Benacerraf 663 y ss.). Sigamos la máxima que suele atribuirse a Julio César, *Divide et Impera*, y que aplicada a cuestiones menos sangrientas podría ser el lema de un determinado modo de hacer filosofía, la filosofía analítica. Confiemos en que si al emperador le dio resultado, a nosotros al menos nos permita avanzar en la comprensión de este complejo fenómeno. No hay más que echar una ojeada a los artículos clásicos sobre verdad matemática para darse cuenta de que en este asunto se mezclan cuestiones de al menos tres tipos:

1. Metafísicas: el debate realismo vs. antirrealismo acerca de la matemática (¿hay objetos matemáticos?).
2. Epistémicas: el debate acerca de la posibilidad del conocimiento matemático (¿cómo descubrimos verdades matemáticas?).
3. Semánticas:
  - 3.1 La definición del concepto de verdad.

### 3.2 La teoría del significado desde la que analizamos las oraciones de las ciencias empíricas y formales.

Para dar respuesta a la pregunta de si la verdad matemática es prueba, se requiere clarificar la definición del concepto de verdad. Defenderé que la respuesta es negativa: nada hay de especial en la verdad matemática. Identificarla con la prueba es un movimiento paralelo al que supone identificar la verdad corriente con los métodos de verificación, y aunque esta posición ha tenido algunos adeptos, como los positivistas lógicos de principios del siglo xx, no es dominante. Sin embargo, nos mantendremos tan neutrales como sea posible acerca de las cuestiones 1 y 2. La teoría del significado solo se abordará tangencialmente en lo que sigue.

## 2.

Antes de tratar el asunto que da cuerpo al presente trabajo, merece la pena presentar, aunque sea de manera breve, el marco teórico de la discusión. La teoría de la verdad desde la que abordaremos las relaciones entre verdad y prueba es lo que se ha llamado la teoría prooracional, cuyos proponentes más conocidos son Dorothy Grover (1992) y Christopher Williams (1976, 1992, 1995) (*véase* Frápolli 2009, 2012 y 2013).

Dicha teoría tiene como objetivo definir el concepto de verdad y, con base en ello, los términos que lo representan en los lenguajes naturales. Nada dice, sin embargo, acerca de cómo saber cuándo estamos autorizados a sostener que un contenido proposicional particular es verdadero. Esto es, la definición de verdad es independiente de los criterios que permiten proponer un contenido como verdadero. Hacer esto último no es más que aseverar ese contenido. En *Lógica*, una obra publicada póstumamente, escrita entre 1879 y 1891, Frege caracteriza una aseveración de la siguiente manera: “El objetivo de la empresa científica es la *verdad*. Reconocer íntimamente *algo como verdadero* es hacer un juicio, y dar expresión a este juicio es hacer una aseveración” (2). Casi un siglo después, Searle insiste: “una aseveración es (género muy especial de) compromiso con la verdad de una proposición” (38). Por otro lado, las reglas que garantizan que el acto de aseverar se lleve a cabo con éxito son independientes del significado de la verdad.

Esta tesis nos coloca en una posición teórica específica respecto a la teoría del significado. La separación tajante entre definición y criterio de aplicación nos aleja de entrada de los reduccionismos empiristas de todo tipo, entre ellos el verificacionismo, el instrumentalismo y el convencionalismo, que hacen

descansar el significado en el método y la verdad en el resultado de su aplicación. Un ejemplo de esta actitud lo ofrece la doctrina oficial del Círculo de Viena. Moritz Schlick, su inspirador, dice por ejemplo:

El acto de verificación en el que desemboca finalmente el camino seguido para la resolución del problema siempre es de la misma clase: es el acaecimiento de un hecho definido comprobado por la observación, por la vivencia inmediata. De esta manera queda determinada la verdad (o la falsedad) de todo enunciado, de la vida diaria o de la ciencia (62).

Para el positivismo, el contenido informativo de un enunciado se explicita en el proceso de su verificación, y la verdad no es más que el resultado positivo de este proceso.

La diferencia entre definición y criterios de verdad es asumida por cualquiera que rechace un punto de vista epistémico acerca de la verdad. Ramsey, por ejemplo, declara:

Porque debemos distinguir una cuestión, ‘¿qué es la *verdad*?’, de la cuestión bastante diferente ‘¿qué es *verdadero*?’. Si un hombre preguntara qué era verdadero, el tipo de respuesta que podría esperar sería o bien una enumeración tan completa como fuera posible de todas las verdades, esto es, una enciclopedia, si no un test o criterio de verdad, un método por el cual pudiera [discernir] una verdad de una falsedad (318-319. Traducción propia).

Algunas décadas después dice Tarski:

Sea lo que sea que pueda conseguirse construyendo una definición materialmente adecuada de verdad para un lenguaje científico, un hecho parece cierto: la definición no lleva consigo un criterio que funcione para decidir si oraciones particulares en ese lenguaje son verdaderas o falsas (y de hecho no está diseñada para ese propósito en absoluto) (Tarski 1969, 414. Traducción propia).

La verdad solo puede atribuirse a contenidos que cumplen las condiciones generales para su aseveración o que presumimos que las cumplirán. Una vez que un contenido ha sido propuesto como resultado de un acto de aseveración ejecutado con éxito, ese contenido está en condiciones de ser explícitamente respaldado en una adscripción de verdad. A veces, las condiciones de aseveración de un contenido se denominan “condiciones de verdad”. En una oración como “El gato está sobre la alfombra”, decimos que las condiciones de verdad son aquellas en las que la oración es verdadera: en las que hay un gato y una alfombra y estos dos objetos están en la relación “estar sobre” el primero con el segundo. La explicación de esta denominación descansa en los requisitos

para que una aseveración se produzca con éxito: para afirmar algo el hablante debe estar dispuesto a respaldarlo, esto es, debe creer que es verdadero. Para aseverar con éxito que el gato está sobre la alfombra, el hablante debe cumplir las condiciones que le den derecho a creer que esto es así y que le permitan ofrecer sus razones si es interpelado, esto es, debe estar en una cierta relación con los objetos de los que trata su aseveración, una relación que le permita comprometerse con ese contenido y sus consecuencias.

Esta manera de hablar no es peligrosa siempre que entendamos que hablamos de condiciones del acto de aseveración, y todavía no del acto de la adscripción explícita de la noción de verdad. Sin ser peligrosa es, sin embargo, desafortunada porque sugiere la identificación del significado de la verdad con las condiciones y, de este modo, oscurece la diferencia entre definición y criterios. La razón por la que no es posible ofrecer criterios generales de aseveración, o condiciones de verdad generales, debería ser obvia: tales criterios, tales condiciones, dependen de la información codificada en la proposición que se asevera y de los rasgos de la situación en la que tal afirmación se lleva a cabo. No tener en cuenta que, en último extremo, las condiciones de verdad dependen del contenido es lo que Benacerraf critica de las posiciones que él llama “combinatorias” acerca de la verdad matemática. Por decirlo de una manera directa, las condiciones de verdad dependen del contenido y del contexto. La definición de verdad no.

La tesis semántica que caracteriza a la teoría prooracional de la verdad puede formularse como sigue:

[T1] Las oraciones en las que adscribimos verdad a un contenido funcionan como variables proposicionales.

A las oraciones en las que adscribimos verdad a un contenido las llamamos “adscripciones de verdad”. Algunos ejemplos son:

- (1) Lo que ella dice es verdadero.
- (2) Eso es verdad.
- (3) Que la nieve es blanca es verdadero.
- (4) “México, D. F., es la capital de los Estados Unidos Mexicanos” es una oración verdadera.

Las variables, proposicionales o no, son expresiones cuyo contenido semántico en contexto no deriva de su significado lingüístico. El contenido semántico de una expresión es su aporte a la información transmitida en el acto de habla en el que se usa. A veces este aporte es un desarrollo, adaptación o modulación de su significado lingüístico, como en la interpretación contextualista del

significado de los términos “lecho” (decimos “el lecho nupcial” pero también “el lecho del río”), “tragar” (decimos “se tragó la comida sin masticar” pero también “el cajero se tragó mi tarjeta”) o “corte” (decimos “me corté con el cuchillo del pan” pero también “Juan cortó con su novia de toda la vida”). Esta posición la defienden en la actualidad Recanati y Carston, entre otros (véase, por ejemplo, Recanati 49 y ss.; Carston 324 y ss.). O directamente, como defiende Isidora Stojanovic (19 y ss.), el aporte de la expresión se identifica con su significado lingüístico. Otras veces, sin embargo, no hay una relación evidente entre el contenido y el significado lingüístico. Una oración en la que ocurra el término “gato” tendrá como parte de su contenido, como parte de lo que se dice mediante ella, algún ingrediente, rasgo o concepto directamente relacionado con el significado de “gato”. En contraste, expresiones como “él”, “eso”, “así” tienen un significado lingüístico que no permite determinar a priori su valor semántico, aunque su significado lingüístico pueda verse como una regla para descubrir tal valor contextualmente. Desde el clásico artículo de D. Kaplan de 1979 esta distinción entre significado lingüístico y valor semántico o, en su terminología, entre carácter y contenido, ha hecho fortuna. La teoría prooracional analiza las adscripciones de verdad –oraciones como 1-4– siguiendo las pautas de las expresiones demostrativas o deícticas, esto es, de las variables o proformas, en la categoría de oraciones.

El pronombre personal “tú” tiene como valor semántico la persona a la que dirijo mi alocución y así, sin cambiar de significado, su contenido puede identificarse con mi marido, con mi hija, o con la Directora de mi Departamento, dependiendo de quién sea la persona con la que hablo en cada momento. El pronombre “tú”, sin embargo, no es ambiguo. La ambigüedad es un fenómeno que se aplica al significado, y lo que varía de un contexto a otro en este caso es el contenido. De igual modo, las oraciones 1 y 2 tienen un significado lingüístico que por sí solo no permite aventurar cuál es la información que transmiten. ¿Qué dicen las personas que profieren 1 o 2? En un sentido de “decir”, dicen lo que esas oraciones significan. La respuesta a la pregunta podría ser: “pues dice que lo que ella dice que es verdadero” o “dice que eso es verdad”. Pero en el sentido más básico, en el sentido que nos permite preguntarnos si estamos o no de acuerdo, o en qué ha cambiado nuestro conocimiento tras sus afirmaciones, tenemos que admitir que con 1 y 2 no decimos nada. Sin embargo, si colocamos 1 y 2 en un contexto apropiado, la situación se transforma. Imaginemos el siguiente diálogo:

**[D1]**

Victoria: Colombia está al sur de México.

Joan: Lo que ella dice es verdadero (refiriéndose a lo dicho por Victoria).

El significado lingüístico de las oraciones proferidas por Victoria y Joan es completamente distinto; de hecho, no tienen ninguna palabra en común. Sin embargo, la información que Joan transmite no va más allá de lo dicho por Victoria. Lo que Joan hace con su adscripción de verdad es asumir la aseveración realizada. El acto de habla que realiza Victoria es una aseveración, con un contenido proposicional ('Colombia está al sur de México') al que ella presta apoyo y con el cual se compromete. Llamemos al acto en el que el contenido se pone de manifiesto por primera vez *acto primario*. El acto de habla llevado a cabo por Joan también es una aserción, solo que es un acto de segundo orden, un acto que requiere una aserción previa que le "preste" su contenido. Llamemos a este acto derivado *acto secundario*. En un acto de adscripción de verdad, la oración en la que el término de verdad ocurre adquiere su contenido de manera anafórica, por referencia a una mención previa cuyo contenido hereda. Si la afirmación de la que se hereda el contenido es posterior al acto de adscripción, la relación entre este acto y el acto primario se denomina catafórica. La diferencia entre referencia anafórica y referencia catafórica es, no obstante, irrelevante para el análisis de la verdad. En el diálogo citado, Joan no dice nada más que Victoria, pero si Joan profiriera las mismas palabras en otro contexto y con otro antecedente anafórico, su compromiso sería distinto. Consideremos el diálogo siguiente:

**[D2]**

Marina: Los humedales de la provincia de Almería están a punto de desaparecer.

Joan: Lo que ella dice es verdadero (refiriéndose a lo dicho por Marina).

En [D2] Joan se compromete con el contenido del acto de Marina y al hacerlo es como si él mismo hubiera proferido las palabras que ella emitió. Sin embargo, no hay ninguna ambigüedad en la oración "Lo que ella dice es verdadero", aún cuando su contenido sea completamente distinto en [D1] y en [D2].

La teoría prooracional nos ayudará a desenredar algunos malentendidos sistemáticamente contenidos en el debate acerca de la verdad matemática. El más importante para nuestros propósitos en el presente artículo consiste en conectar los criterios y la definición de verdad con actos de habla distintos. Los criterios de aplicación de la verdad matemática no son más que los criterios de afirmación de un contenido matemático. Estos corresponden al acto primario y aquí caben todo tipo de consideraciones epistemológicas. Sin embargo, una vez que el contenido ha sido aseverado, puede ser traspasado a un acto secundario sin que el uso de la noción de verdad muestre aquí ninguna especificidad ligada al contenido matemático del acto primario.

### 3.

La distinción entre criterios y definición que la teoría prooracional vincula con actos distintos permite una salida elegante al dilema que Benacerraf formuló tras identificar dos requisitos que, en su opinión, toda teoría de la verdad matemática debe cumplir. El primero demanda que lo que se proponga como una análisis de la verdad matemática sea un análisis de la noción de verdad, esto es, que el concepto de verdad sea reconocible en el análisis; el segundo exige que el tratamiento que se ofrezca del conocimiento y de la verdad no destierre las verdades matemáticas del ámbito de lo cognoscible, esto es, que seamos capaces de explicar que el conocimiento matemático es posible.

Según el filósofo de Princeton, todos los intentos de caracterizar la verdad matemática disponibles hasta este momento pueden clasificarse en dos grupos: aquellos que optan por la semántica a costa de la epistemología y aquellos que optan por la epistemología a costa de la semántica: “Será mi tesis general – dice– que casi todos los enfoques del concepto de verdad matemática pueden identificarse con la servidumbre a uno u otro de estos dos amos [semántica y epistemología] a *expensas del otro*” (661). Benacerraf tiene razón no solo desde un punto de vista histórico. Dentro de las coordenadas clásicas según las cuales la noción de significado depende de la idea de representación, o sirve a la semántica o sirve a la epistemología. Adaptemos el ejemplo de Benacerraf para clarificar este punto, y consideremos las dos oraciones siguientes:

(5) Hay al menos tres ciudades grandes más antiguas que Bogotá.

(6) Hay al menos tres números perfectos mayores que 17.

Si el significado de una oración es el estado de cosas que representa, y el significado de sus términos lo constituyen los objetos a los que estos refieren, entonces 5 y 6, que tienen la misma estructura superficial, deberían significar de la misma manera. Ambas dicen que hay al menos tres objetos que están en la relación descrita con otro objeto (Bogotá, en un caso, y el número 17, en el otro). Esta explicación –el platonismo clásico, en el caso de 6– nos permite tener una semántica estándar unificada y sostener así que no hay nada divergente en la semántica de las oraciones que incluyen términos matemáticos. Sin embargo, una vez ofrecida la explicación semántica, la dificultad epistémica se hace patente: ¿cómo conectamos los términos con sus referentes? ¿Cómo sabemos que la oración es verdadera o falsa? Para dar respuesta a la dificultad epistémica, el platónico tiene que desarrollar una epistemología no estándar y suponer que el conocimiento matemático es peculiar. Benacerraf cita el ejemplo de Gödel y su propuesta de la intuición matemática que nos conecta con el ámbito de los estados de

cosas abstractos. La opción alternativa es preocuparse por la epistemología y ofrecer una respuesta clara al problema del conocimiento matemático, como en opinión de Benacerraf hacen los convencionalistas y los formalistas, al precio de renunciar a una semántica unificada. Si las oraciones de la matemática transmiten conocimiento convencional, unido al significado de los signos, entonces las oraciones 5 y 6 no significan del mismo modo, y la verdad de una y otra no puede explicarse siguiendo las mismas pautas. En un caso hablamos de objetos y sus localizaciones espaciales relativas, asumiendo que la verdad es correspondencia, mientras que en el otro caso no.

El análisis prooracional de la verdad supone la ventaja de que la noción de verdad misma queda fuera de esta tensión entre semántica y epistemología. La distinción entre los dos actos de habla que requiere el análisis de las adscripciones de verdad permite, al menos, que la definición de verdad no se vea alterada por las posibles diferencias entre criterios, ligados al acto primario. 5 y 6 pueden significar de maneras distintas y los criterios para afirmarlas pueden ser tan distantes como el día y la noche, y aún así podemos decir que 2 tiene la misma función cuando se relaciona anafóricamente a 5 que cuando se une anafóricamente a 6.

Aun si el dilema de Benacerraf fuera irresoluble, la teoría prooracional permitiría defender la estabilidad semántica de la noción de verdad. El dilema, sin embargo, no es irresoluble: solo lo parece cuando la teoría del significado que se favorece es el representacionalismo generalizado en cualquiera de sus versiones. Si significar es representar estados de cosas, entonces el ámbito de los objetos abstractos plantea la cuestión del acceso epistémico. Hay alternativas, no obstante. La semántica inferencialista es una salida al dilema Benacerraf que ofrece una semántica unificada sin expulsar a la matemática del ámbito de la explicación naturalista (véase, por ejemplo, Frápolli & Villanueva). Este tema, sin embargo, está fuera del alcance del presente artículo.

Del segundo requisito de Benacerraf solo nos ocuparemos parcialmente. La posición de la verdad que defendemos permite que las verdades matemáticas se consideren conocimiento genuino, aunque no debatiremos aquí qué significa “conocimiento” ni cómo se adquiere. La semántica del operador de conocimiento “X sabe que” indica que la persona que adscribe conocimiento está ella misma dispuesta a respaldar el contenido que aparece como argumento del operador. Michael Williams, por ejemplo, dice:

De manera similar, al atribuir conocimiento a otra persona, concedo tanto la verdad de lo que él cree como su derecho a creerlo. Y al adelantar esta doble aceptación, asumo los mismos compromisos y doy expresión a los mismos

derechos. Así Robert Brandom describe el conocimiento como un tipo peculiar de ‘status normativo complejo e híbrido’ [Brandom dice ‘deóntico’]. *Es complejo* porque implica elementos de compromiso y de derecho. *Es híbrido* porque, al atribuir conocimiento a otra persona, implicamos cosas acerca de *nuestros* compromisos y derechos, no solo acerca de los suyos (2001, 17. Traducción propia).

Y el significado pragmático de las adscripciones de verdad consiste en estar dispuestos a respaldar un contenido. Aseverar con todas las garantías del acto, como por otra parte hacemos todos alguna vez, contenidos matemáticos implica que de estos hay conocimiento. Lo contrario sería caer en una contradicción pragmática.

Unos años antes de que se publicara el artículo de Benacerraf, Tarski (1969) presentó sus ideas acerca de la verdad matemática y de la relación entre verdad y prueba. No hay nada especialmente novedoso en este artículo del matemático polaco. Su aproximación general a la semántica supone un desarrollo formal y preciso de las intuiciones representacionistas básicas, y en el artículo de 1969 resume lo que defendió en el texto sobre la definición de verdad (1935/1956). Sin embargo, su posición es iluminadora por la manera en la que evita el dilema de Benacerraf. Al concentrarse Tarski en la semántica de lenguajes formalizados de un cierto tipo y hablar de verdad en un modelo, los compromisos metafísicos de su posición son mucho más débiles que los del platonismo clásico, defendido por ejemplo por Gödel. Tampoco aparece en este caso el problema epistemológico del acceso. La noción de prueba, el otro tema del artículo, aparece reformulada como “prueba formal”. Esto es una sucesión de fórmulas de un sistema axiomático especificado. Una prueba es un criterio de verdad, pero el significado de la verdad viene dado por su teoría semántica, que es aplicable a todos los lenguajes de un cierto tipo. Tarski domestica las nociones de verdad, lenguaje y prueba, con lo que el debate filosófico se neutraliza. Esta domesticación conceptual le permite no tener que elegir entre los cuernos del dilema de Benacerraf porque las nociones que utiliza están vaciadas de sus significados corrientes. El teorema de incompletud de Gödel de 1931 hace el resto: de acuerdo con Tarski, el teorema zanja de manera negativa la cuestión de la identificación entre verdad y prueba.

Si los resultados de Gödel se interpretan de la manera habitual, se despliegan dos posibles vías teóricas ante la relación de verdad y prueba: o bien se acepta la trascendencia de la verdad o bien se admiten métodos de justificación matemática distintos de la prueba estricta. Ambas vías han sido transitadas. Un ejemplo de la primera opción lo constituye la propuesta de Stephen Read y de la segunda el trabajo de Hilary Putnam.

Read y Putnam coinciden en la tesis de que la verdad matemática no es especial: ambos defienden que las razones por las que calificamos de verdadero un contenido en las ciencias de la naturaleza son equivalentes a las razones que nos hacen aceptar un contenido en matemáticas. Para los dos autores, las verdades matemáticas dependen de cómo son las cosas. Sin embargo, a pesar de esta coincidencia, los puntos de vista de uno y otro muestran diferencias marcadas. La propuesta de Read es una reificación de los procedimientos epistemológicos: “¿Qué es lo que hace verdaderas a las verdades necesarias?”, se pregunta. Y continúa:

Argumento que toda verdad superviene de cómo son las cosas, y que las verdades necesarias no son una excepción. Lo que las hace verdaderas son las pruebas. Pero si esto es así, la noción de prueba necesita ser generalizada para incluir pruebas transcendentales a la verificación, pruebas cuya corrección excede nuestra capacidad para verificarlas (47).

Para Read, tanto las verdades empíricas como las verdades de las ciencias formales requieren “hacedores de verdad” (*truthmakers*), y delimita su posición teórica adhiriéndose a dos principios:

[P1] Superveniencia de la verdad sobre el ser así: la verdad depende de cómo son las cosas.

[P2] Hacedor de verdad: si algo es verdadero, tiene que haber algo que lo haga verdadero, aceptando incluso el principio de razón suficiente leibniziano.

La posición de Read es peculiar porque junto con los principios mencionados, que son de corte claramente realista, defiende que los *truthmakers* de las proposiciones matemáticas son las pruebas mediante las cuales las establecemos. Al hablar de pruebas y hacer depender de estas la verdad, podría parecer que se inclina hacia un tratamiento epistémico de la verdad matemática, y que los resultados de Gödel supondrían una refutación directa de su posición. Read interpreta, sin embargo, que la noción de prueba que Gödel utiliza es demasiado restrictiva e incluso sugiere una concepción transcendente de las pruebas mismas. Dice: “Es completamente plausible que algunas verdades necesarias, incluidas verdades aritméticas, sean verdaderas en virtud de pruebas que, por alguna razón, nos resulta imposible formular” (53).

Veamos ahora cómo defiende Putnam la similitud entre la verdad matemática y la verdad empírica. Sostiene que las verdades matemáticas dependen de cómo es el mundo, las teorías matemáticas hacen aseveraciones que son verdaderas o falsas y las oraciones de la matemática, las fórmulas, incluyen términos, como “función” o “conjunto”, que refieren, en último extremo, a

objetos en el mundo. Para Putnam, las proposiciones matemáticas no son ni a priori ni incorregibles y poseen contenido empírico, aunque muy general.

En el trabajo de 1975, Putnam ofrece ejemplos de métodos cuasiempíricos en matemáticas, entre ellos la forma en la que Descartes asumió la correspondencia entre número reales y puntos en una línea o la introducción del axioma de elección por parte de Zermelo, y concluye que la prueba no es el único método de justificación matemática. Algunos de los hallazgos más preciados de la matemática se han producido y establecido por confirmación, por lo que hay razones, asume, para aceptar la existencia de verdades matemáticas epistémicamente contingentes. Su posición es así una defensa del pluralismo metodológico en las ciencias formales y una manera de justificar el realismo que, él considera, es el único camino para evitar la sensación de que el éxito en la ciencia es milagroso. Otros autores han defendido el pluralismo metodológico en el seno de las matemáticas. Penélope Maddy, por ejemplo, declara que “los primeros axiomas de la teoría de conjuntos fueron motivados por el deseo pragmático de probar axiomas particulares, no por un deseo fundacional de evitar las paradojas” (483), y además de mencionar el caso de Zermelo y el axioma de elección, como hace Putnam, comenta las razones que llevaron a Cantor a proponer la hipótesis del continuo.

La aceptación de métodos cuasiempíricos permite una explicación realista en matemáticas que no es platónica. A propósito del realismo, Putnam dice: “Creo que el argumento positivo a favor del realismo tiene un análogo en el caso del realismo matemático. Aquí también, creo, el realismo es la única filosofía que no hace del éxito de la ciencia un *milagro*” (73). Los desarrollos de esta idea han dado lugar al argumento del no milagro a favor del realismo científico (*véase*, por ejemplo, Musgrave).

Aunque las propuestas concretas de Putnam y Read son debatibles y derivan de una comprensión parcial del significado de la verdad, sus motivaciones filosóficas son fácilmente compartibles. Ni uno ni otro aceptan que las verdades matemáticas se adquieran mediante algún mecanismo o facultad supranatural ni que sean a priori en el sentido clásico. Lo que a ambos les falta para dar una respuesta adecuada al problema de la verdad y el conocimiento en matemáticas es una teoría del significado que huya de las simplezas del representacionalismo. El argumento del no milagro, a pesar de las apariencias, no es un argumento a favor del realismo metafísico y semántico, que requeriría la interpretación de toda oración declarativa como una huella o negativo de una situación real o posible. Se trata meramente de una declaración de naturalismo trivial: no somos cerebros en una cubeta. O dicho de otro modo: todo lo que tenemos en la mente es producto, directo o indirecto, de nuestro trato

con el mundo físico y social. Las intuiciones razonables a favor del realismo lo son a favor de lo que he llamado en otro sitio “realismo por defecto” (en prensa). Como seres del mundo natural no tenemos otra opción que creer que las sillas sobre las que nos sentamos no son productos de nuestra imaginación, y que cuando caminamos nuestros pies tocan suelo firme.

No podemos evitar creer que, al abrir la puerta, el jardín seguirá estando ahí, y que cuando hablamos con nuestros hijos son nuestros hijos los que responden y no sus avatares en nuestras cabezas. Asumir la existencia del mundo externo no es ser realista, es ser normal. La alternativa requeriría tratamiento psiquiátrico especializado. En el mismo sentido, afirmar con Aristóteles que decir de lo que es que no es y de lo que no es que es lo falso, o afirmar con Read que la verdad depende de cómo son las cosas, no lo convierte a uno en realista ni en un defensor de la teoría de la verdad como correspondencia, sino que es un indicio de que uno maneja de modo correcto los recursos conceptuales que le permiten ser lingüísticamente competente. El principio de la superveniencia de la verdad sobre el ser así es innegable a fuerza de ser vacío. Es un principio analítico desde el punto de vista lógico-sintáctico y semántico-pragmático. Ofreceremos una explicación de esta afirmación en la sección siguiente.

#### 4.

Putnam y Read desarrollan propuestas sofisticadas que, en último extremo, tratan de dar respuesta al dilema de Benacerraf, esto es, a la tensión entre semántica y epistemología en el ámbito de las ciencias formales. En nuestra opinión, el diagnóstico de Benacerraf sobre las teorías de la verdad matemática que pueblan la historia es correcto, aunque no tiene más valor que el de una descripción de un hecho histórico. El dilema de Benacerraf no es una maldición sobre la verdad matemática, sino una muestra de que el punto de partida de las teorías de la verdad matemática que se enfrentan a él requiere ser reconsiderado. Disolver la dificultad será más fácil con un análisis adecuado del funcionamiento de las adscripciones de verdad.

Defendemos, con Haack, la univocidad de la verdad: “Mi tesis [...] será que hay una verdad, pero muchas verdades; i.e., un concepto de verdad no relativo y no ambiguo, pero muchas y variadas proposiciones, etc. que son verdaderas” (2008, 43-44). Las proposiciones a las que adscribimos verdad son variadas y los criterios que nos justifican para afirmarlas son altamente dependientes de sus propiedades semánticas y de sus circunstancias pragmáticas. No obstante, el acto de habla que realizamos cuando decimos de ellas que son verdaderas es

el mismo y así la función que la noción de verdad realiza en las adscripciones de verdad es estable de un uso a otro.

Consideremos los siguientes ejemplos:

(7) Los ángeles son, en realidad, seres de otros planetas que han venido a ayudarnos.

(8) Todo número par es la suma de dos números primos.

(9) El líquido que llena el vaso es un ácido (tiene un pH por debajo de 4.5).

En relación con el análisis de la verdad se plantean dos cuestiones distinguibles. La primera consiste en saber cuándo estamos justificados a afirmar 7-9, la segunda en saber qué hacemos cuando decimos que esos contenidos son verdaderos. La primera pone sobre la mesa el tema de los criterios, la segunda el del significado de la verdad. Téngase en cuenta que cuando hablamos de afirmaciones o aseveraciones, no estamos hablando meramente de actos de proferir ciertas palabras, hablamos de actos de habla completos con sus condiciones de felicidad y satisfacción. Para afirmar 7, uno debería tener a mano ciertos datos históricos y arqueológicos; si hubiera una prueba a disposición, estaríamos en condiciones de afirmar 8, y si hemos introducido papel tornasol en la solución y se ha vuelto anaranjado estamos autorizados a afirmar 9. Los datos arqueológicos, las pruebas y el comportamiento del papel tornasol ofrecen criterios para las afirmaciones de 7-9. Dependiendo de la teoría epistémica que uno prefiera y los avances de la ciencia, los criterios pueden ser otros: si soy abducida por un platillo volante y mis captos me cuentan que ellos ya estuvieron en la tierra hace miles de años para ayudarnos, quizá mi epistemología de trasfondo me permita comprometerme con 7. Si, como Putnam, acepto la confirmación como criterio de la verdad matemática, podría afirmar 8 por los indicios de que disponemos aunque no tengamos una prueba en sentido estricto. Si en vez del papel tornasol, usamos otros productos como la fenolftaleína, el resultado podría colocarnos en la posición de asumir 9. Ahora bien, consideremos los diálogos siguientes:

[D3]

Victoria: Los ángeles son, en realidad, seres de otros planetas que han venido a ayudarnos.

Yo: Eso es verdad.

[D4]

Marina: Todo número par es la suma de dos números primos.

Yo: Eso es verdad.

**[D5]**

Gweni: El líquido que llena el vaso es un ácido (tiene un pH por debajo de 4.5).

Yo: Eso es verdad.

Aunque las oraciones que emiten Marina, Victoria y Gweni expresen contenidos distintos, lo que yo hago en cada caso cuando replico “Eso es verdad” es lo mismo. Afirmo de manera subsidiaria los contenidos presentados por ellas. En cada caso, el contenido de mi acto de habla es distinto y en todos los casos es idéntico al contenido del acto de habla que da pie a mi preferencia.

El significado de la noción de verdad, por tanto, no cambia de un contexto a otro. Cuando hablamos de verdades matemáticas de lo que hablamos es de proposiciones matemáticas verdaderas. Lo que es distinto en cada caso es la proposición, esto es, el contenido de la adscripción de verdad. Y para cada tipo de proposición habrá criterios específicos.

La diversidad de los criterios, sin embargo, no debería ser un argumento a favor de la equivocidad de la verdad. Si así fuera, junto con la verdad matemática deberíamos aceptar la verdad química, la verdad histórica, la verdad física, la verdad biológica y así con todos los campos del saber con criterios específicos de justificación de sus proposiciones.

Volvamos ahora a la semántica de las adscripciones de verdad. Los lenguajes naturales tienen mecanismos para formar variables oracionales del tipo de las adscripciones de verdad, aún sin usar términos como “verdad” o “verdadero”. Oraciones como

(2) Eso es verdad.

son prooraciones cuyo significado lingüístico está determinado por los significados de sus términos componentes y cuyo valor semántico en cada caso viene determinado por el contenido del acto de habla primario con el que se ligue contextualmente. Otros ejemplos de expresiones que funcionan del mismo modo son los siguientes:

(10) Así son las cosas.

(11) Eso es así.

(12) De hecho, así es.

Si en los diálogos [D1]-[D5], yo hubiera respondido con “Así es” (o con cualquier otra alternativa equivalente), el significado global del acto de habla no se habría visto modificado un ápice. Oraciones como 1 y 2 y 10-12 funcionan de la misma manera, son el mismo tipo de instrumento conceptual y lingüístico.

Son prooraciones, esto es, variables oracionales. Por esta razón, decir con los teóricos de la correspondencia,

[T2]  $p$  es verdadero si y solo si las cosas son como dice  $p$ ,

o el emparejamiento de expresiones como “Eso es verdad” y “Eso es un hecho”, o “Eso es verdad” y “Así son las cosas” no nos hacen avanzar en la comprensión de la noción de verdad. Lo que muestra la relación entre estas expresiones y las formulaciones clásicas de la correspondencia es que 1 y 2 y 10-12 (y muchas otras) son instrumentos alternativos para hacer lo mismo. Nadie puede rechazar que algo es verdadero porque dice cómo son las cosas. Todas esas oraciones son equivalentes en su funcionamiento lógico-semántico y en su papel pragmático. En sentido estricto, las oraciones en las que las emparejamos,

(13)  $p$  es verdadero porque dice cómo son las cosas.

(14) Eso es verdadero si las cosas son así.

(15) Algo es verdad si es un hecho.

no son analíticas, porque la analiticidad es relativa al significado lingüístico, que no comparten. En sentido amplio, no obstante, comparten con las verdades analíticas clásicas la ausencia de contenido factual y su dependencia del sistema conceptual y lingüístico.

Las formulaciones estándar de la correspondencia de la verdad o principios como el principio de superveniencia de la verdad sobre el ser así, de Read, son solo expresiones pomposas de este modesto hecho lingüístico.

## 5.

La prueba es un criterio de aseveración de verdades formales. Si tengo una prueba de  $p$ , puedo usar  $p$  como premisa en ulteriores derivaciones, y puedo considerar a  $p$  como conocimiento establecido. Una vez llegados a este punto, podemos decir que  $p$  es verdadero. La prueba es el criterio de afirmabilidad y está ligada al acto primario. La verdad aparece en un momento lógicamente posterior, y su significado no depende de los criterios. Si solo aceptamos pruebas como criterios de afirmabilidad de contenidos formales, es fácil identificar el acto primario de afirmabilidad que resulta de la prueba con el acto secundario de la adscripción de verdad. Aún así la identificación pasa por alto una distinción que es esencial a las adscripciones de verdad, y es su funcionamiento como variables proposicionales. Las mismas razones que tendríamos para identificar verdad matemática y prueba nos servirían para identificar

verdad química y la utilización del papel tornasol. Hasta donde llega nuestro conocimiento del tema, nadie ha defendido esta última. Nuestra conclusión es que la primera está igualmente injustificada.

## TRABAJOS CITADOS

- Benacerraf, P. “Mathematical truth”. *The Journal of Philosophy* 7.19 (1973): 661-679.
- Carston, R. *Thoughts and Utterances. The Pragmatics of Explicit Communication*. Oxford: Blackwell, 2002.
- Frápolli, M. J. “Relativism of truth vs. dogmatism about truths. A false dichotomy”. *Teorema* XXVIII.3 (2009).
- . *The Nature of Truth. An Updated Approach to the Meaning of Truth Adscriptions*. Springer, 2012.
- . “How to naturalize truth”. *Regarding Mind, Naturally: Naturalist Approaches to the Sciences of the Mental*. Eds. Marcin Milkowski y K. Talmont-Kaminski. Cambridge Scholars Publishing, 2013. 262-281.
- . “No miracles. What does it mean that science seeks the truth?” (en prensa).
- Frápolli, M. J. & N. Villanueva. “Frege, Sellars, Brandom: expresivismo e inferencialismo semánticos”. *Perspectivas en la filosofía del lenguaje*. Comp. David Pérez Chico. Prensas de la Universidad de Zaragoza, 2013. 583-617.
- Frege, G. *Posthumous Writings*. Oxford: Basil Blackwell, 1979.
- Grover Grover, D. *A Prosentential Theory of Truth*. Princeton University Press, 1992.
- Grover, D. L, J. L. Camp & N. Belnap. “A prosentential theory of truth”. *Philosophical Studies* 27 (1975): 73-125.
- Haack, S. “The unity of truth and the plurality of truths”. 2003. *Putting Philosophy to work. Inquiry and its place in culture. Essays on science, religion, law, literatura, and life*. Amherst, NY: Prometheus Book, 2008. 43-60.
- Kaplan, D. “Demonstratives”. 1979. *Themes from Kaplan*. Eds. Joseph Almog, Howard Wettstein y John Perry. New York: Oxford University Press, 1989.
- Maddy, P. “Believing the axioms I”. *The Journal of Symbolic Logic* 53.2 (1988): 481-511.

- Musgrave, A. “The miracle argument for scientific realism”. *The Rutherford Journal*. (2007). En línea. <rutherfordjournal.org>
- Putnam, H. “What is mathematical truth?”. *Mathematics, Matter and Method. Philosophical Papers 1*. Cambridge University Press, 1975. 60-78.
- Quine, W. v. O. “Truth by convention”. 1939. *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*. Eds. P. Benacerraf y H. Putnam. Cambridge University Press, 1964.
- Ramsey, F. P. “La naturaleza de la verdad”. 1927. *Frank Plumpton Ramsey. Obra filosófica completa*. Ed. M.J. Frápolli. Granada: Editorial Comares, 2005. 318-335.
- Read, S. (2010): “Necessary proof and truth”. *Kriterion* jun. 2012: 47-67.
- Recanati, F. *Truth Conditional Pragmatics*. Oxford University Press, 2010.
- Schlick, M. (1930/1959) “El viraje de la filosofía”. A. J. Ayer. *El positivismo lógico*. México, D. F.: Fondo de Cultura Económica. Edición original: Logical Positivism, Chicago: The Free Press of Glencoe, 1959.
- Searle, J. *Actos de habla*. Madrid: Cátedra, 1980. Edición original de 1969, *Speech Acts. An Essay in the Philosophy of Language*. Cambridge: University Press.
- Stojanovic, I. *What is Said: An Inquiry into Reference, Meaning and Content*. VDM Verlag Dr. Müller, 2008.
- Tarski, A. “The concept of truth in formalized languages”. 1935. *Logic, Semantics, Metamathematics*. Papers from 1923 to 1938. Oxford: Clarendon Press, 1956. 152-278.
- . “Truth and Proof”. 1969. *Alfred Tarski. Collected Papers 4, 1958-1979*. Eds. R. Givant y E. N. McKenzie Birkäuser. Basel, Boston, Stuttgart, 1986. 401-423.
- Williams, C.J.F. *What is Truth?* Cambridge: Cambridge University Press, 1976.
- . *Being, Identity and Truth*. Oxford: Clarendon Press, 1992.
- . “The prosentential theory of truth”. *Reports on Philosophy* 15 (1995): 147-154.
- Williams, M. *Problems of Knowledge. A Critical Introduction to Epistemology*. Oxford University Press, 2001.