Descubrimiento o invención: dos analogías para comprender el quehacer del matemático[1]

Discovery or Invention: two analogies to understand the work of the mathematician

Raúl Meléndez Acuña[2]

Resumen

En este artículo, partiendo de algunas observaciones del Wittgenstein tardío acerca de las matemáticas, se contrastan y se examinan dos imágenes de la actividad del matemático: como descubridor y explorador de una realidad independiente, y como inventor de analogías. Se aclara cómo Wittgenstein usa la segunda para disipar algunos malentendidos que la primera ocasionaría, si la prejuzgamos como verdadera. Con ello se pretende mostrar cómo Wittgenstein persigue, con sus observaciones sobre las matemáticas, uno de los propósitos centrales de su filosofía: cambiar la manera como vemos las cosas y así liberarnos de analogías desorientadoras que pueden llegar a mantener cautivo nuestro pensamiento.

Palabras clave: Filosofía de las matemáticas; analogías; Wittgenstein

Abstract

Taking some of the late Wittgenstein's observations on mathematics as a starting point, two images of the mathematician's activity are contrasted and examined in this essay: the mathematician as discoverer and explorer of an independent reality, and the mathematician as creator of analogies. We aim to make clear how Wittgenstein uses the second one to avoid some possible misunderstandings that have their source in the first one, if it is prejudged as a true explanation. In this way, we'll attempt to show how Wittgenstein, by means of his philosophical observations about mathematics, pursues one central purpose of his philosophy: to change our way of seeing things and thus to free us from misleading analogies that may hold our thought captive.

Key words: Philosophy of mathematics; analogies; Wittgenstein

1 Recibido: 26 de abril de 2014. Aceptado: 11 de mayo de 2014.

2 Universidad Nacional de Colombia. Correo electrónico: remelendeza@unal.edu.co

1. Introducción

El quehacer del matemático puede verse de varias maneras. En efecto, se puede recurrir a diferentes imágenes, analogías o modelos para tratar de comprender bien su actividad al resolver problemas y demostrar teoremas que enuncian las soluciones. Ellas permiten entender también, de modos diversos, el significado de las proposiciones matemáticas, el sentido en el que se afirma de ellas que son verdaderas y el carácter necesario que se les suele otorgar. En este ensayo, partiendo de algunas observaciones de Wittgenstein sobre las demostraciones y las proposiciones de las matemáticas, se contrastarán y evaluarán dos imágenes de la labor del matemático: como descubridor o explorador y como inventor o creador. Esto suscita el problema de hallar la manera adecuada de valorarlas y las expresiones que conviene utilizar para hacerlo. Tratándose de imágenes o analogías, digámoslo así, preteóricas, no es claro que sea adecuado juzgar si son verdaderas o falsas, como si fueran tesis o teorías. A primera vista, parece menos problemático examinar, más bien, cuán esclarecedoras o, por el contrario, cuán engañosas o desorientadoras pueden llegar a ser; o dicho de otra manera: si ellas ayudan a resaltar y apreciar más claramente, o por el contrario a oscurecer, algunos aspectos relacionados con la práctica matemática y con el sentido, la verdad y la necesidad de las proposiciones matemáticas.

Al contrastarlas se busca comprender cómo Wittgenstein emplea la imagen del matemático como inventor para resistir la seducción que llegaría a ejercer sobre nosotros la del matemático como descubridor o explorador de una realidad abstracta, que él considera desorientadora. De este modo, se pretende también ilustrar uno de los propósitos centrales que el propio Wittgenstein se trazaba en su filosofía:

> Si yo rectifico un error filosófico y digo que siempre se ha imaginado esto así, pero no es así, entonces siempre señalo una analogía/entonces debo siempre señalar una analogía, de acuerdo con la cual uno se ha orientado, y que no es cierta./ … entonces debo siempre señalar una analogía, de acuerdo con la cual se ha pensado, pero que no se ha reconocido como analogía./ (*BT 276*).

Este ensayo se divide en dos partes. En la primera se bosquejará la imagen del matemático como descubridor y se plantearán algunos problemas que surgen, si se usa no como una analogía preteórica que busca resaltar aspectos, sino como una teoría filosófica verdadera que pretende explicar dichos aspectos. En la segunda parte, siguiendo la sugerencia de Wittgenstein de aclarar qué es lo que demuestra un matemático examinando cómo lo demuestra, se tratará de mostrar que una parte importante de la actividad del matemático puede verse como una labor creativa mediante la cual se inventan, precisamente, analogías.

2. El matemático como descubridor y la analogía entre las proposiciones matemáticas y las empíricas

¿Es el matemático un descubridor o un inventor? Esta es una pregunta que ocupa un lugar central en las reflexiones filosóficas del Wittgenstein tardío acerca de las matemáticas; y es, en general, una cuestión importante cuando se trata de comprender bien su labor cuando resuelve sus problemas y cuando demuestra sus teoremas. Quizá se tenga ya, de entrada, alguna vaga inclinación a responderla de una u otra manera, pero la pregunta misma requiere, en primer lugar, aclaración. Como subrayaremos más adelante, de muchos problemas en matemáticas, particularmente de aquellos que exigen la creatividad y originalidad del matemático, se podría decir algo similar: la solución del problema ha de incluir una aclaración del sentido del mismo.

Si nos sentimos tentados a decir que el matemático es un descubridor, ¿qué nos motiva a decirlo?, ¿cuál es el punto de decirlo?, ¿qué se quiere aclarar o destacar diciéndolo?, ¿qué es lo que quisiéramos decir con que el matemático descubre o encuentra y cómo lo hace?, ¿qué habla a favor y qué en contra de ello?, ¿qué problemas tiene esta imagen de lo que hace el matemático? Es probable que solo una vez se haya aclarado cómo se quiere responder a estas preguntas se pueda llegar a decir: "Ahora sí logro, finalmente, comprender bien lo que querías decir cuando afirmabas que el matemático es un descubridor". Antes se tendrían, apenas, ideas demasiado imprecisas al respecto.

Hay una imagen muy corriente del quehacer del matemático, difundida especialmente entre ellos mismos, que lo representa como un explorador que descubre hechos en una realidad matemática abstracta diferente al mundo físico[3]. Una variante importante, que en puntos esenciales coincide con ella, es la del matemático como explorador de rasgos muy generales y abstractos del mundo empírico y no de una realidad diferente a él. La imagen está motivada de manera natural por una analogía que se suele invocar para tratar de comprender el sentido de las proposiciones matemáticas y para hallar el fundamento de su verdad: así como las proposiciones empíricas verdaderas describen hechos en el mundo físico, las proposiciones matemáticas verdaderas representan hechos que descubrimos en una realidad matemática. Esta analogía concuerda bien, a su vez, con la imagen del lenguaje como espejo de la realidad (¿de alguna realidad?). De acuerdo con ella, los diferentes tipos de proposiciones del lenguaje, en particular las matemáticas, cumplirían todos la

3 A este respecto escribe un eminente matemático: "El punto de vista realista [esto es, platonista] es probablemente el que la mayoría de matemáticos preferirían adoptar. Solo hasta que advierten algunas dificultades de la teoría de conjuntos es que comenzarían siquiera a cuestionarlo" (Cohen, citado en Davis y Hersh, 321. Traducción propia).

función esencial de representar, reflejar o describir hechos; los distintos tipos de discurso –empírico, lógico, matemático, ético, estético, entre otros– se diferenciarían solo en la medida en que describen o bien diferentes rasgos de la única realidad o bien diversas realidades. Algo que se querría lograr con la analogía (este bien podría ser el punto de hacerla) es tomar como caso paradigmático el de las proposiciones empíricas, para así extender nuestras maneras de concebir su sentido, como representaciones de lo real, y su verdad, como correspondencia con lo real, a otros casos, entre ellos el de las matemáticas. Ella nos permite tener una concepción homogénea del lenguaje y una explicación general, uniforme de cómo expresamos en él sentido y verdad.

Nos serviremos ahora de un ejemplo muy elemental para ilustrar lo natural y plausible que es esta imagen de las matemáticas, pero también para plantear algunos cuestionamientos y problemas que suscita. Se trata de la secuencia aritmética "+2", cuyo comienzo es: 2, 4, 6, 8, 10, 12,… (el ejemplo se reitera en algunas de las observaciones de Wittgenstein acerca del seguimiento de reglas). En esta secuencia infinita aparece el número 1000 (como aparecen, tarde o temprano, todos los números pares en su orden) y en ella el número 1002 sigue al 1000. Tenemos aquí dos proposiciones matemáticas incontrovertiblemente verdaderas; si es que hay este tipo verdades en matemáticas, o en absoluto, he aquí dos buenos ejemplos.

Sin embargo, cuando tratamos de aclarar en qué sentido son verdaderas estas dos afirmaciones y de hallar el fundamento de estas verdades, así como de su carácter necesario e indubitable, entramos en un terreno que ya no es tan incontrovertible. Pero, ¿no utilizamos la analogía entre proposiciones matemáticas y empíricas y la imagen/concepción realista de las matemáticas justamente para explicar esto? De acuerdo con ellas, las proposiciones matemáticas, como cualesquiera otras, son verdaderas en el sentido en que afirman algo que, en efecto, se da de hecho. Una manera inocente de entenderlo es que al decirlo, simplemente nos estamos repitiendo, estamos volviendo a afirmar, introduciendo unos términos prescindibles ("verdadero" o "de hecho" o "en efecto") lo que afirmaban ya, de manera inobjetable, las dos proposiciones matemáticas mismas.

En cierto sentido, decir de una proposición p que es verdadera o decir que es un hecho que p, equivale a afirmar p. Pero entonces no estaríamos aclarando ni explicando nada. Para hacerlo, tendríamos que entender este uso de "verdadero" o "de hecho" de manera menos trivial, menos inofensiva y más metafísica, como expresando algo que realmente ocurre en la realidad matemática. Las proposiciones de las matemáticas tendrían sentido y serían verdaderas porque lo que afirman se da efectivamente en una realidad independiente. Hay, pues, en ella una secuencia infinita, que ya posee todos sus términos y es un hecho objetivo –independiente de lo que afirmemos o sepamos o demostremos– que contiene al 1000 y que a este número le sigue el 1002. Si afirmamos algo diferente no describimos o representamos bien tal realidad. La verdad matemática se entiende como correspondencia con ella. De la misma manera se puede justificar por qué es correcto que sigamos las reglas y hagamos las operaciones en matemáticas como lo hacemos. ¿Por qué al sumar 2 a 1000 se obtiene 1002 y no otro número? La manera como se relacionan de hecho estos números en la inmutable realidad matemática determina de manera inexorable que es así y, más aún, que tiene que ser así. ¿Cómo se establece la forma correcta de continuar la secuencia "+2": 2, 4, 6, 8, 10, 12,…? Solo se requiere escribir los números que ya están ordenados así (eterna o, más bien, intemporalmente) en la secuencia infinita completa. Si tal secuencia no existiese, completa, parecería que esto no está determinado, que nada nos obliga y que entonces podríamos seguir la secuencia como quisiéramos.

Wittgenstein nos dice que cabe imaginar esa secuencia como si se tratara de unos rieles que se pierden hasta el infinito, de los cuales vemos, en nuestra finitud, solo el comienzo, pero que podríamos, y *tendríamos*, que andar sin descarrilarnos para continuar correctamente la secuencia:

> ¿De dónde viene la idea de que el comienzo de la serie es un trozo visible de raíles invisiblemente tendidos hasta el infinito? Bueno, en vez de la regla podríamos imaginarnos raíles. Y a la aplicación ilimitada de la regla corresponden raíles infinitamente largos.
>
> «Todos los pasos ya están realmente dados» quiere decir: ya no tengo elección. La regla, una vez estampada con un determinado significado, traza las líneas de su prosecución a través de todo el espacio. – Pero si algo así fuese realmente el caso, ¿de qué me valdría?
>
> No; mi descripción sólo tenía sentido si se entendía simbólicamente. – *Así es como me parece* – debí decir.
>
> Cuando sigo la regla, no elijo.
>
> Sigo la regla *ciegamente* (*IF* §§ 218 y 219).

La imagen de los raíles o rieles que se extienden infinita e invisiblemente es una manera de representarnos de modo más concreto y vívido la realidad matemática que nos dicta lo que es verdad en matemáticas y la manera correcta de seguir sus reglas. En este pasaje, sin embargo, se manifiesta una duda: si las cosas fueran en realidad tal como nos las representamos, es decir, si la imagen fuese textualmente verdadera, ¿de qué nos valdría?, ¿cómo nos ayudaría a seguir correctamente la regla o a justificar que la seguimos bien? Nos imaginamos esos rieles, pero siendo invisibles. A menos que podamos percibirlos o conocerlos de otra forma, si son invisibles daría igual que no existieran. Del mismo modo, si la realidad matemática, como se suele entender, es abstracta y no es perceptible sensiblemente, entonces a menos que se aclare cómo podríamos tener un acceso cognitivo a ella, su existencia no nos serviría para construir correctamente nuestro conocimiento matemático o para justificarlo. De nuevo, sería como si ella no existiese.

La idea, sugerida por el realismo matemático, de que para seguir correctamente la regla "+2" es necesario copiar tal cual lo que ya está escrito y determinado en el original matemático, esto es, en la secuencia infinita, inmutable y real, lleva al interrogante acerca de cómo sabemos qué es lo que hay que copiar. Entendida así la pregunta "¿de qué nos valdría?", expresa una objeción típica que se le suele hacer al platonismo matemático: una suerte de escepticismo acerca de la posibilidad de conocer una realidad abstracta, no sensible.

Pero también puede interpretarse que esta pregunta plantea una objeción diferente: ¿de qué nos valdría copiar la realidad matemática en nuestras proposiciones y reglas matemáticas, *aún si pudiéramos descubrirla y conocerla de manera fidedigna* mediante alguna intuición intelectual (alguna facultad no sensible, sino de nuestro entendimiento)?, ¿es la matemática que necesitamos la que es copia exacta y fiel de una realidad matemática abstracta o, más bien, la que aplicamos de manera provechosa y fructífera tanto en innumerables actividades cotidianas (repartir objetos equitativamente entre varias personas, calcular áreas de terreno o volúmenes de recipientes, hacer compras en el supermercado y en otras partes, promediar calificaciones de los estudiantes de una asignatura, jugar billar o parqués y miles más), como en algunos procedimientos de las ciencias naturales y sociales? Después de todo, a menos que se dé una prueba de ello, las matemáticas que resulten de copiar la realidad matemática no tienen por qué coincidir con las que nos es conveniente, y hasta necesario, utilizar en tantas y tan importantes actividades de nuestra vida, algunas de las cuales seguramente motivaron el desarrollo muchas de nuestras teorías y técnicas matemáticas.

Si no coincidieran y optáramos por las primeras, por concordar con los hechos matemáticos, y no por las segundas, que desempeñan un papel tan fundamental y tienen tan importantes usos en nuestra forma de vida, las consecuencias serían desastrosas. En tal caso, mejor haríamos en prescindir de las primeras y quedarnos con las que necesitamos vitalmente; o en conservar ambas, pero entonces, en ese caso, las primeras serían como un lujo innecesario.

Esta objeción la formula Wittgenstein en el siguiente pasaje:

> Imagínate esta curiosa posibilidad: que nos hubiéramos equivocado siempre hasta ahora al multiplicar 12 x 12. Sí, es incomprensible cómo haya podido suceder, pero ha sucedido. Así pues, ¡todo lo que se ha calculado de este modo es falso! – Pero ¿qué importa eso? ¡No importa nada! – Algo falso ha de haber, pues, en nuestra idea de la verdad o la falsedad de las proposiciones aritméticas (*LFM* § 135).

Cabría agregar aquí que habría algo falso en nuestra idea de la verdad o falsedad de las proposiciones matemáticas, entendida como correspondencia con la realidad, es decir, hay algo problemático en la concepción realista de la verdad y la necesidad matemáticas. Para mostrarlo, Wittgenstein se imagina que nuestras matemáticas no son las verdaderas, es decir, que no coinciden con la realidad matemática abstracta. Pero incluso si coincidieran, tenemos las matemáticas que tenemos y no otras diferentes, y les otorgamos a ellas y no a otras un carácter de necesidad e inexorabilidad, no porque ocurra esta feliz coincidencia, sino porque se nos han vuelto imprescindibles, ya que les damos miles de fructíferas aplicaciones en los contextos prácticos más básicos y diversos:

> «¿Dónde reside entonces la inexorabilidad propia de la matemática?» – ¿No sería un buen ejemplo de ello la inexorabilidad con la que el dos sigue al uno, el tres al dos, etc.? – Pero esto quiere decir, ciertamente: seguir en la *serie de los números cardinales*; porque en otra serie distinta sigue algo diferente. ¿Y no es precisamente esa secuencia la que *define* esa serie? – «¿Quiere decir esto, pues, que todos los modos de contar son igualmente correctos, y que cada uno puede contar como quiera?» Seguramente no llamaríamos «contar» al hecho de que cada uno dijera los números uno detrás de otro de cualquier forma; pero no es solamente una cuestión de nombres. Puesto que aquello que llamamos «contar» es ciertamente una parte importante de la actividad de nuestra vida. El contar, el calcular, no son, por ejemplo, un simple pasatiempo. Contar (y esto significa: contar *así*) es una técnica que se usa diariamente en las más variadas operaciones de nuestra vida.
>
> Y por eso aprendemos a contar tal como lo aprendemos: con un inacabable ejercicio, con una exactitud sin piedad; por eso se nos impone inexorablemente a todos decir «dos» después de «uno», «tres» después de «dos», etc. «Pero ¿es solo un uso ese contar? ¿No corresponde a esa secuencia también una verdad?» La verdad es: que el contar se ha acreditado. – «¿Quieres decir, por tanto, que 'ser-verdadero' significa ser utilizable o provechoso?» – No, sino que de la serie natural de los números –así como de nuestro lenguaje– no se puede decir que es verdadera, sino: que es útil y, sobre todo, que es utilizada (OFM I, § 4).

Aquí, el interlocutor de Wittgenstein, quien dice lo que está entre comillas, propone recurrir a una noción de verdad objetiva para justificar nuestra aritmética y evitar llegar a un indefendible relativismo matemático: a que todas las maneras de contar son correctas. Probablemente sea esta una motivación muy importante que lleva a sostener una concepción realista de las matemáticas. Wittgenstein quiere evitar este falso dilema realismo-relativismo en matemáticas y aclara que su manera de hacerlo no debe confundirse con apelar a una concepción pragmatista de la verdad y la necesidad.

No se trata de identificar verdad con utilidad, sino de subrayar que es debido a que las reglas de las matemáticas, por ejemplo, las de la aritmética elemental, se aplican en muchas actividades de nuestra vida, que nos obligamos a seguirlas de la misma manera y excluimos cualquier otra como incorrecta. Por supuesto, es vital para utilizar las matemáticas, en los muchos contextos en los que se aplican, que concordemos en usarlas de la misma manera, en dar los mismos pasos, en llegar a los mismos resultados:

> Supongamos que de ahora en adelante, cuando se nos dice que multipliquemos, todos nosotros llegamos constantemente a diferentes resultados. Supongo que entonces ya no llamaríamos a esto calcular en absoluto. La técnica en su totalidad (por ejemplo, calcular el número de baldosas para un piso) perdería el carácter de un cálculo. Ya no tendríamos, de hecho, un resultado correcto y uno incorrecto.
>
> Todo el asunto se basa en el hecho de que no obtenemos resultados diferentes. Por eso es que es tan absurdo decir que 12 x 12 = 144 podría ser incorrecto. Pues la concordancia en obtener este resultado es la justificación para esta técnica (LFM X, 102).

La objetividad y la necesidad matemáticas se fundan en la concordancia en aplicar las reglas de la misma manera, en calcular llegando a los mismos resultados, y no en la concordancia metafísica con una realidad ideal. Tampoco necesitamos la segunda para fundamentar la primera. Gracias a la primera, que es una concordancia natural entre nuestras maneras de actuar y de reaccionar y aquellas en que se nos adiestra e inicia en las técnicas de las matemáticas, podemos establecer que el resultado en el que coincidimos es el correcto y tiene que ser el correcto.

Si no se calcula, si no se cuenta así, si no se infiere así, si no se sigue la regla así, ya no lo aceptaríamos como una instancia de “calcular”, “contar”, “inferir”, “seguir la regla”. Prescindir de la imagen realista de las matemáticas no lleva entonces a negar la objetividad y la necesidad de las matemáticas, sino solamente a cuestionar una manera de explicarla.

Se podría reaccionar a las serias críticas que se han formulado arriba contra la concepción realista de las matemáticas, diciendo que solo valen si se toma esta concepción literalmente como una teoría que tiene que ser verdadera y servir de fundamento para la verdad y necesidad de nuestras matemáticas, y ya no solo como una imagen, como un objeto de comparación, como un símil[4]. Recuérdese que la pregunta "¿de qué me valdría?", de la que extrajimos las objeciones, venía antecedida por "Pero si algo así fuese realmente el caso"; es decir, las objeciones se hacen al asumir que la concepción o imagen del realismo matemático es cierta *al pie de la letra*. La imagen misma, se puede replicar, no sería errónea o falsa; no lo sería en tanto se use como objeto de comparación, pues empleada así simplemente nos muestra y resalta un importante aspecto de la aplicación correcta de reglas matemáticas, a saber: que al usarlas no vemos otra manera de hacerlo, que no sentimos que tengamos otra opción[5] y que las aplicaciones correctas de una regla se pueden ver, entonces, *como si* ya estuvieran realizadas de antemano o como si copiáramos un original o un arquetipo inmutable. Pero precisamente porque hay una manera natural de seguir la regla en la que concordamos –porque no se nos ocurre otra manera de hacerlo, no vemos otra opción y seguimos la regla "ciegamente"–, entonces no necesitamos, en la práctica, copiar nada, ni ajustarnos a un arquetipo exterior que nos dicte como hacerlo. La imagen sí sería objetable en la medida en que la tomemos dogmáticamente como una explicación verdadera: nuestras aplicaciones correctas de la regla están bien porque de hecho ya están realizadas así, de antemano, en una realidad abstracta. Justamente lo anterior es lo que estaría sugiriendo Wittgenstein al reaccionar a la pregunta "¿de qué me valdría?" con esta salvedad: "mi descripción sólo tenía sentido si se entendía simbólicamente. – Así es como me parece – debí decir". La imagen puede aclarar "cómo me parece", pero si se usa dogmáticamente para afirmar que "así es", ya no se entendería bien; nos hace extraviar.

4 De manera similar se puede interpretar que las críticas que hace el Wittgenstein tardío, en sus *Investigaciones filosóficas*, a la imagen del lenguaje como representación figurativa de la realidad presentada en su primera obra, el *Tractatus Logico-Philosophicus,* son críticas a un dogmatismo que prejuzga el modelo o la imagen (de la que él dijo que lo mantuvo "cautivo", véase IF § 115) como si fuese algo que tiene que cumplirse, que tiene que ser verdadero, que no admite otras imágenes posibles. Esto lo sugiere el propio Wittgenstein cuando escribe: "Sólo podemos, pues, salir al paso de la injusticia o vaciedad de nuestras aserciones exponiendo el modelo como lo que es, como objeto de comparación, como, por así decirlo, una regla de medir; y no como prejuicio al que la realidad tiene que corresponder. (El dogmatismo en el que tan fácilmente caemos al filosofar)" (*IF* § 131). Será importante entonces, cuando presentemos la imagen alternativa que ofrece Wittgenstein a la del matemático como descubridor, que evitemos atribuirle este dogmatismo.

5 Este aspecto que se resalta en la imagen realista o platonista de las matemáticas es expresado de manera más general por los matemáticos Davis y Hersh: "Encontraremos que la actividad de investigación matemática obliga a un reconocimiento de la objetividad de la verdad matemática. El 'platonismo' del investigador matemático no es realmente una creencia en el mito de Platón; es solamente una conciencia de la naturaleza refractaria, de la obstinación de los hechos matemáticos. Son lo que ellos son, no lo que *nosotros* queremos que sean" (362).

Wittgenstein insiste en que se puede apelar a esta imagen de una realidad abstracta para dar cuenta de la necesidad lógica, que sería, en última instancia, la misma necesidad matemática:

> «Pero ¿no se sigue, con necesidad lógica, que obtienes dos, cuando añades uno a uno, y tres, cuando añades uno a dos, etc.? ¿Y no es esta inexorabilidad la misma que la de la inferencia lógica?» – Sí! Es la misma. – «Pero ¿no corresponde a una verdad la inferencia lógica? ¿No es *verdadero* que esto se sigue de esto?» – La proposición: «es verdadero que esto se sigue de esto» quiere decir simplemente: esto se sigue de esto. Y ¿cómo usamos esa proposición? – ¿Qué sucedería si infiriéramos de otro modo? ¿*Cómo* entraríamos en conflicto con la verdad?
>
> […]
>
> ¡Pero yo sólo puedo inferir aquello que realmente se sigue! ¿Ha de significar esto: sólo aquello que se sigue de acuerdo a las reglas de inferencia; o bien: sólo aquello que se sigue de acuerdo con ciertas reglas de inferencia, que corresponden de algún modo a una realidad? Lo que vagamente nos ronda aquí es que esa realidad es algo muy abstracto, muy general y muy rígido. La lógica es una suerte de ultrafísica […]

Una voz en este diálogo pregunta si a la inferencia lógica no corresponde una *verdad*: "que esto se sigue de esto". Igualmente podría preguntar si no es *verdadero* que 1002 sigue a 1000 en la secuencia "+2". En estas preguntas se sugiere que las reglas de inferencia y las reglas de la suma, o de formación de secuencias aritméticas, han de ser las correctas, en el sentido de ser aquellas que sí están justificadas o fundadas en la manera como realmente se relacionan los pensamientos verdaderos o los números en una realidad abstracta y rígida. Lo que dice y exige esta voz parece estar motivado por cierto temor de que se niegue la objetividad y necesidad de la inferencia lógica y de la aplicación de reglas en las matemáticas.

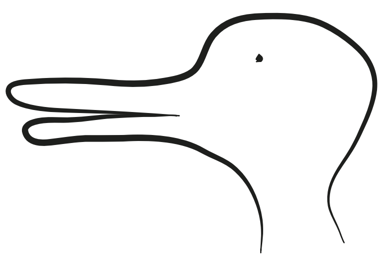
Negarlas podría llevar a un punto de vista inadmisible: que se pueda inferir como se quiera o que se pueda sumar o calcular como se quiera, que no se pueda justificar nuestra forma de hacerlo como la objetivamente correcta. La imagen realista que estamos bosquejando nos salvaría –pero, como ya sugerimos antes, no es lo único que nos salvaría– de esta anarquía intolerable en las más ciertas y exactas de nuestras disciplinas intelectuales, en nuestros modelos de precisión y rigor.

En la réplica a esta voz se pregunta, a su vez, cómo se entraría en conflicto con la verdad –y con la realidad, si esta verdad se entiende como concordancia con ella–, si inferimos (contamos, calculamos,…) de otro modo. Se podría interpretar que esta réplica quiere defender en particular ese anarquismo muy radical que niega la objetividad y la necesidad matemáticas.

Pero Wittgenstein no quiere negarlas, sino, más bien, cuestionar la imagen del realismo matemático concebida de modo excesivamente literal como una teoría o explicación verdadera de ellas y ofrecer una imagen diferente.

Pero, ¿cómo es que nos podemos engañar así y caer en la ilusión de que el "como si" o el "me parece" es en realidad un "así es de hecho" o incluso "así tiene que ser"?, ¿cómo un objeto de comparación puede llegar a ser un prejuicio y una exigencia de que las cosas tengan que ser como nos lo muestra la analogía? En miles de otros casos no caemos en este error de malentender así nuestras propias imágenes o símiles y tenemos clara conciencia de que son meras imágenes (no necesitamos que un filósofo nos lo esté recordando). Si, por ejemplo, un adolescente nos dice que sus autoritarios padres lo hacen sentir como si su casa fuese una cárcel, sería absurdo que él mismo u otra persona en sus cabales tomara la comparación como una explicación textualmente verdadera de su situación. Es claro que el joven está empleando aquí una entre varias comparaciones posibles para ilustrar las condiciones en las que vive en su casa, tal como él las ve, y que no quiere que tomemos lo que dice al pie de la letra.

Sin embargo, en el caso de las proposiciones y reglas matemáticas, si no tenemos o no se nos ocurre más que una imagen para comprender en qué sentido las llamamos verdaderas o necesarias, si a diferencia de lo que dice el joven esto no tiene un sentido claro y no disponemos de otra(s) analogía(s) para comprenderlo, entonces podemos llegar a prejuzgar que las cosas son, de hecho, como las vemos en esa única imagen. Ella nos puede llegar a mantener cautivos y ocurriría, como dice Wittgenstein del que él llama "prejuicio de pureza cristalina", refiriéndose a la imagen del lenguaje del *Tractatus*: "la idea se asienta en cierto modo como unas gafas ante nuestras narices y lo que miramos lo vemos a través de ellas. Nunca se nos ocurre quitárnoslas" (*IF* § 103). Este caso sería comparable al de una persona que al ver el famoso dibujo del pato-conejo solo pueda verlo como el dibujo de un pato. Quien sufre de esta ceguera para los aspectos afirmaría dogmáticamente que lo que se ve en el dibujo *es* un pato y no, como diría el que ve ambos aspectos en el dibujo, que lo ve como un pato.



Así como una manera de "curar" a una persona que sufre de esta ceguera para los aspectos es tratar de mostrarle, pese a los impedimentos que ello remueva en él, que hay *otra manera* de ver el dibujo[6], asimismo se puede intentar liberar a alguien del dogmatismo consistente en tomar una imagen de las proposiciones y reglas de las matemáticas como *la* verdad acerca de ellas, a pesar de las resistencias que este tenga[7], evidenciando la analogía de la que brota su error y mostrándole que no es la única, que hay otras imágenes o analogías que permiten ver otros aspectos. En este caso, una resistencia que puede oponerse a esto es cierto encanto que hallamos en la imagen que tomamos como *la* verdadera. El encanto hace difícil liberarse de una imagen que se ha vuelto engañosa.

Algunos de los hechos que descubriría el matemático como explorador de una realidad abstracta son bastante prosaicos, como el hecho de que $2 + 2 = 4$, pero otros serían mucho más extraordinarios, como el hecho, descubierto por el matemático alemán Georg Cantor, de que hay infinitos de diferentes tamaños, más precisamente, que la cardinalidad (o el número de elementos) del conjunto de los números reales es mayor que la del conjunto de los números naturales. Más aún, de acuerdo con esta seductora imagen del matemático como descubridor, Cantor habría hallado no solamente la relación entre la cardinalidad de los números naturales y la de los números reales, sino también habría explorado un asombroso reino poblado por una cantidad, ella misma infinita, de números transfinitos cada vez más grandes. Muchos de los descubrimientos hechos por los matemáticos en sus apasionantes exploraciones, son relatados de maneras que no dejan de maravillarnos, como si se tratara de exóticos ejemplares de la abstracta fauna matemática: "Contra todo lo que esperaba, ¡no hay una unidad de medida, por pequeña que la escoja, que mida exactamente estos dos segmentos de recta! ¡Hay magnitudes inconmensurables!", "Hay curvas continuas a las que no se les puede trazar una tangente en ningún punto, ¿quién lo hubiera imaginado?" "¡Es increíble! ¿No sabías que los matemáticos han descubierto que hay una jerarquía infinita de infinitos, cada vez más grandes?".

6 Le diríamos que el dibujo se puede ver también como un conejo, pero no que el dibujo *es* el de un conejo, pues no se quiere sustituir un dogmatismo por otro.

7 En algunas observaciones acerca de su propia actividad filosófica, Wittgenstein nota similitudes entre su "método" y el psicoanálisis. Por ejemplo, en la sección titulada *La filosofía evidencia las engañosas analogías en el uso de nuestro lenguaje* del capítulo "Filosofía" de su *Big Typescipt*, él escribe: "Una de las tareas más importantes es expresar todos nuestros falsos razonamientos de modo tan característico, que lector diga: 'Sí, eso es exactamente lo que quería decir'. Exponer la fisonomía de cada error. / En efecto, sólo cuando se la reconoce como tal, ella es la expresión correcta. (Psicoanálisis.) / Lo que el otro reconoce es la analogía que le ofrezco, como fuente de su razonamiento (BT 277. Traducción propia).

Dada cierta fascinación con esta manera de ver los descubrimientos matemáticos, puede parecernos decepcionante que algún filósofo iconoclasta pretenda decir cosas que conduzcan a cuestionarla o incluso a abandonarla. Es justamente la pretensión de combatir esta manera de ver la práctica matemática, en aras de la claridad, la que motiva muchas de las observaciones filosóficas de Wittgenstein sobre el teorema de Cantor y, en general, sobre las matemáticas. En sus clases sobre los fundamentos de las matemáticas, dictadas en Cambridge en 1939, replica así a la advertencia que hace Hilbert de que nadie nos expulsará del paraíso de Cantor:

> Yo diría, «No soñaría en intentar expulsar a nadie de este paraíso.» Yo trataría de hacer algo bien diferente: trataría de mostrarles que no es un paraíso – de manera que ustedes lo abandonen por su propia cuenta. Yo diría, «Bienvenidos a esto; simplemente miren a su alrededor.» (*LFM* XI, 103. Traducción propia).

Wittgenstein quiere alterar nuestra manera de ver. Quiere liberarnos de una imagen, ofreciéndonos otra. Hay una diferencia importante con el ejemplo del pato-conejo. En este ejemplo no se entendería bien si alguien dijera que es mejor o preferible (aunque no porque sea más verdadero, sino por ser más claro, menos engañoso) ver el dibujo como conejo que como pato.

Si alguien tratara de persuadirnos, sin más, de ver el dibujo como conejo, pero no como pato, no veríamos por qué. Podríamos verlo de ambas maneras, sin que ello sea problemático. Pero el pasaje sobre el paraíso de Cantor deja claro que Wittgenstein quiere combatir una manera de ver y persuadirnos en favor de otra, quiere mostrarnos una imagen bajo una luz más favorable que la otra.

Al comienzo de sus clases de 1939, advirtió:

> Los matemáticos tienden a pensar que las interpretaciones de los símbolos matemáticos son un parloteo – un tipo de gas que rodea al proceso real, al núcleo matemático esencial. Un filósofo provee gas, o decoración – como garabatos en la pared de una habitación.
>
> Yo podría, ocasionalmente, producir nuevas interpretaciones, no con el fin de sugerir que son correctas, pero con el fin de mostrar que la vieja interpretación y la nueva son igualmente arbitrarias. Sólo inventaré una nueva interpretación para ponerla junto a la vieja y decir, "Escoge aquí, haz tu elección." Yo solo haré gas para expulsar viejo gas (LFM I, 14).

Para expulsar el viejo gas no se requiere mostrar que es falso y que el nuevo gas sí es verdadero; pero sí, por lo menos, hacer ver el primero como problemático y presentar el segundo de manera persuasiva, atrayente.

También en la primera de esas clases, Wittgenstein, tras anunciar que iba a ocuparse de algunos malentendidos que surgen cuando se dan interpretaciones de cómo se usan o cómo funcionan las proposiciones matemáticas, dijo:

> Supongamos que el Profesor Hardy viene a mí y me dice "Wittgenstein, he hecho un gran descubrimiento. He encontrado que…". Yo diría, "No soy un matemático, y entonces no estaré sorprendido de lo que me digas. Pues yo no podré saber lo que tú quieres decir hasta que sepa cómo lo encontraste." No tenemos derecho a estar sorprendidos de lo que nos dice. Pues, si bien él habla inglés, aún así el significado de lo que dice depende de los cálculos que ha hecho.
>
> Similarmente, supongamos que un físico dice, "Finalmente he descubierto cómo ver la apariencia de las personas en la oscuridad – lo cual nadie había sabido nunca antes." – Supongamos que Lewy dice que está muy sorprendido. Yo diría, "No te sorprendas Lewy", que sería como decir, "No digas tonterías."
>
> Digamos que él continúa, explicando que él ha descubierto cómo fotografiar con rayos infrarrojos. Entonces tienes derecho a sorprenderte si te place, pero acerca de algo completamente diferente. Es un tipo diferente de sorpresa. Antes sentías como si la cabeza te diera vueltas en un remolino, como en el caso de la línea cortando el círculo – remolino que muestra que hay algo que no has comprendido. No deberías simplemente mirarlo boquiabierto; deberías decir, "No sé de qué estás hablando." (LFM I, 17).

Con la comparación que hace aquí Wittgenstein con el ejemplo del descubrimiento del físico, él pretende mostrar cómo la imagen del matemático como descubridor es potencialmente desorientadora. Nos puede hacer caer en la ilusión de que comprendemos algo y que esto es sorprendente, cuando realmente aún no lo hemos comprendido. Puesto que es así, cabría entonces tener un asombro o una perplejidad que no es, empero, la que se expresaría diciendo "entiendo lo que ha descubierto y ¡es maravilloso!", sino más bien la que haríamos mejor en manifestar en una pregunta como "¿qué diantres quiere usted decir?".

Pero, ¿realmente no comprendemos bien, por ejemplo, el descubrimiento de Cantor, antes de tener que adentrarnos en los detalles de su demostración? Ya se nos ha dicho que él descubrió que hay infinitos más grandes que otros y, ¿qué más necesitamos que se nos diga para entender esto?, ¿acaso no sabemos español? o ¿no sabemos lo que significa "infinito", "más grande que"?, y ¿quién es el señor Wittgenstein para decirnos que no tenemos derecho a asombrarnos de lo que descubrió Cantor? Bueno, pues no sabemos cómo se está usando la expresión "más grande que" *en este caso,* si bien tiene usos ordinarios y diáfanos en otros contextos, y por eso no podemos decir que entendamos cabalmente lo que se nos dice, ni tendríamos, entonces, por qué maravillarnos de tamaño descubrimiento.

Pero si es así, entonces, ¿de dónde nace aquí la ilusión de que comprendemos algo que no comprendemos? Puede surgir, justamente, de esa analogía que tendemos a hacer entre las proposiciones empíricas y las de las matemáticas. Si alguien nos dice que tiene dos gatos en su casa y que uno es más grande que otro, por supuesto que no cabe, en este caso muy ordinario, ni la sorpresa ni la confusión. Se trata de un uso cotidiano y sencillo de una expresión que comprendemos sin problema alguno. Si no sonara tan artificial y pedante, y si no fuera además superfluo, se podría aclarar, en tono filosófico, que la oración está simplemente describiendo un hecho, a saber, que esa persona tiene dos gatos en su casa y uno es más grande que el otro y que la oración es verdadera si concuerda con ese hecho, es decir, si ese hecho en realidad se da (aunque con ello, probablemente solo estaríamos diciendo lo mismo que se dice con la oración inicial, pero de una manera más enredada).

Pues bien, de la misma manera deberíamos comprender la afirmación matemática de que hay infinitos más grandes que otros: con ella se describe un hecho y se asevera que este efectivamente se da. Solo que se trata ahora de un hecho matemático y de uno que sí es inesperado, asombroso. Sin embargo, ya no se trata de que decir esto de la afirmación matemática sea innecesario y más complicado. El problema actual es que decir esto no nos ayuda a comprender bien el sentido de la proposición matemática; y no solo no nos ayuda, sino que incluso nos puede engañar y hacernos las cosas más difíciles, pues la analogía con la proposición empírica, más ordinaria, nos da únicamente la *ilusión* de comprender, pero no la comprensión. En la medida en que Wittgenstein quiera hacernos conscientes de esta ilusión, estaría buscando hacer algo parecido a lo que Sócrates pretendía lograr con sus interlocutores que se ufanaban de ser sabios en las cuestiones acerca de las que él los interrogaba. Así como Sócrates quería llevarlos a que admitieran que no sabían lo que creían saber, a reconocer su propia ignorancia, Wittgenstein quiere llevarnos a tomar conciencia de que no comprendemos algunas cosas que creemos comprender con suficiencia, por así decirlo, a reconocer nuestra propia confusión. Por ello recomienda decir, cuando se nos quiere sorprender con presuntos descubrimientos matemáticos, "No sé de qué estás hablando", en lugar de "¡Qué asombroso y maravilloso lo que has descubierto!".

Se puede insistir aún, en que si comprendemos las palabras "infinito" y "mayor que" y reparamos en cómo están ordenadas en la oración "hay infinitos más grandes que otros", entonces ello ha de ser suficiente para entender el hecho que está siendo descrito o representado por la oración, esto es, para entender la oración. Pero, ¿qué podemos imaginarnos que representa la oración?, ¿la oración representaría que un conjunto infinito está en una cierta relación, la relación de "ser de mayor tamaño", o de "tener mayor cardinalidad", con otro?, ¿cómo nos imaginamos a dos conjuntos infinitos en esta relación?, ¿no es aquí que la cabeza podría comenzar a dar vueltas, como en un remolino? De todas maneras, en este punto resulta razonable la recomendación de Wittgenstein de no mirar las imágenes que giran confusamente en nuestra mente, sino atender a cómo se demuestra la oración, si se quiere comprender su sentido. Así como entendemos mejor el descubrimiento del físico si se nos dice que halló cómo hacer fotografías con rayos infrarrojos, comprenderíamos mejor el descubrimiento de Cantor si se nos aclara cómo demostró que hay más números reales que naturales. Siguiendo esta recomendación, tras discutirla brevemente, y examinando también diferentes maneras de intentar aclarar y resolver el problema de si hay más, y en qué sentido, números reales que naturales, comenzaremos a darle una mirada a la imagen alternativa que propone Wittgenstein, la del matemático como inventor.

Esto debe darnos ocasión también de aclarar qué aspectos se quieren resaltar con esta imagen y si resaltarlos ayuda a liberarnos, si es que reconocemos que hemos caído en él (otra vez la similitud con el psicoanálisis), de un posible aferramiento dogmático a la imagen del matemático como descubridor, que se ha mostrado como potencialmente desorientadora.

3. El matemático como inventor de analogías

En algunas de sus clases, como también en algunos pasajes de sus observaciones filosóficas, Wittgenstein subraya expresamente que para comprender el sentido de un teorema matemático hay que examinar su demostración:

> Lo que quiero mostrarles podría expresarse muy crudamente así: "Si quieres saber qué ha sido probado, mira la prueba" o "No puedes saber lo que ha sido probado hasta que sepas a qué se la llama una prueba de ello." – Pero estas son como exageraciones, parcialmente verdaderas y parcialmente falsas (*LFM* IV, 39).

Ya en unas observaciones filosóficas, escritas unos años antes de haber dictado estas clases sobre filosofía de las matemáticas, señalaba, sin agregar cautamente que ello podía ser en parte falso: "Una proposición matemática dice lo que su demostración demuestra. Es decir, ella nunca dice más que lo que su demostración demuestra" (PB XIII, 181). De esto parece inferirse que es su prueba la que da un sentido a la proposición matemática y que esta no tiene sentido independientemente de cómo se la demuestra. Sin embargo, unas páginas antes había escrito:

> A mi explicación no se le permite eliminar el problema matemático. Es decir, no es que la proposición matemática sólo tenga, con certeza, un sentido, cuando ella (o su negación) haya sido demostrada. (En este caso su negación nunca tendría un sentido (Weyl).) De otro modo podría ocurrir que ciertos problemas, que al parecer lo son, perdieran su carácter de problemas – de preguntas que pueden responderse con un sí o un no (PB XIII, 170).

Wittgenstein es consciente de una seria dificultad que surge de afirmar que es la demostración la que da sentido a lo que se demuestra y que, entonces, antes de ser demostrada, la proposición matemática carece de sentido. Antes de ser demostrada, debe ser posible formularla como una pregunta genuina e indagar sobre ella, lo cual presupone que es inteligible y que se tiene alguna mínima comprensión de su sentido. De no ser así, un problema matemático solo podría plantearse con sentido una vez resuelto, lo cual es francamente absurdo[8]. Quizá esta es la razón por la cual dice que ha de ser en parte falso que solo podemos comprender el sentido de una proposición matemática examinando su prueba. Ello llevaría a decir que el que trata de demostrar o refutar una proposición matemática no tiene idea de lo que quiere hacer. Estaría en una situación similar a la descrita en la paradoja que Menón plantea a Sócrates. Sócrates le había preguntado qué es la virtud y había refutado la respuesta dada por él. Tras la refutación de Sócrates, Menón reconoce que creía conocer la virtud, pero que ahora se da cuenta de que no puede decir qué es. Sócrates le propone, entonces, indagar acerca de qué es la virtud y es en ese momento del diálogo en el que Menón plantea la paradoja:

> ¿Y de qué manera buscarás, Sócrates, aquello que ignoras totalmente que es? ¿Cuál de las cosas que ignoras vas a proponerte como objeto de tu búsqueda? Porque si dieras efectiva y ciertamente con ella, ¿cómo advertirás, en efecto, que es ésa que buscas, desde el momento que no la conocías? (Platón, Menón 80d, 28).

De manera similar, se podría preguntar: "¿cómo puedes siquiera tratar de demostrar aquello que no entiendes? Y si dieras con una demostración, ¿cómo sabrías que ella demuestra aquello que querías demostrar, si aún no lo comprendías?". Así como la paradoja de Menón pone en cuestión la manera como Sócrates

8 El profesor Carlos Cardona plantea esta dificultad de la siguiente manera: "No es posible hablar de una conjetura matemática. Una conjetura es, de alguna manera, la expresión de una proposición matemática que se anticipa a su demostración. Si formulo una expresión, la conjetura de Golbach, por ejemplo, antes de contar con una demostración debo concluir, si forzamos la observación de Wittgenstein, que no entendemos el sentido de la expresión" (241).

practica la filosofía, esta variante suya pone en cuestión la manera como el matemático trata de resolver problemas y de demostrar que las soluciones son correctas, es decir, se cuestiona lo que muchos ven como la esencia del quehacer del matemático. Mostraremos luego que la búsqueda de la solución a un problema matemático nuevo y los intentos de demostrar una conjetura matemática que aún está abierta (como la conjetura de Goldbach) requieren la movilización de una comprensión y un conocimiento previos sobre problemas análogos a los que ya se ha dado una solución. Pero dicha comprensión previa resulta modificada, ampliada y precisada por la solución o demostración que eventualmente se llegue a dar. Podríamos decir entonces que, en el caso de las matemáticas, comprender y conocer lo nuevo exige recordar cosas que ya se comprenden y saben[9], pero no solamente recordarlas, sino también, mediante analogías, crear e inventar nuevas conexiones con ellas.

Lo anterior aclara en qué sentido la observación de Wittgenstein: "No puedes saber lo que ha sido probado hasta que sepas a qué se la llama una prueba de ello", es parcialmente falsa y además sugiere de modo incipiente en qué sentido sería parcialmente verdadera. Precisar esta vaga sugerencia debe ayudar a comprender en qué sentido puede verse al matemático como un inventor, en particular como un inventor de analogías. Se trataría de analogías mediante las cuales logra buscar e inventar la solución de problemas cuyo sentido no le es aún del todo claro. Y al inventar estas soluciones, modifica, aclara y extiende en cierta dirección el sentido de los conceptos que se emplean para formularlas.

Volvamos al ejemplo de los infinitos de distintos tamaños para aclarar la imagen del matemático como inventor. Antes de la demostración de Cantor ha de poder plantearse, con algún sentido, el problema de si el tamaño, la cardinalidad, del conjunto de los números reales es el mismo que el del conjunto de los números naturales. La cuestión de comparar tamaños tiene un sentido claro en el caso de conjuntos finitos y hay diferentes procedimientos para resolverla. Como se sugería arriba, podemos, para enfrentarnos al problema no resuelto, tratar de movilizar lo que ya sabemos sobre problemas que ya hemos solucionado y crear conexiones conceptuales con ellos[10].

9 Recordar, aunque sin tener que ir, como en la reminiscencia platónica, hasta antes de nuestro nacimiento, ni tener que conectarnos con Formas en sí.

10 Adviértase que lo que se presenta aquí como una manera de inventar soluciones a problemas nuevos en matemáticas es una aplicación de un arte de la comparación que, en lo esencial, es el mismo que (¡otra vez una analogía!) el descrito por Wittgenstein como su "manera de ver las cosas", y el mismo que él pone en práctica para tratar, terapéuticamente, los problemas filosóficos: "Una fuente principal de nuestra falta de comprensión es que no vemos sinópticamente el uso de nuestras palabras. – A nuestra gramática le falta visión sinóptica. – La representación sinóptica produce la comprensión que consiste en 'ver conexiones'. De ahí la importancia

Miremos uno muy trivial: ¿tengo en mi nevera más tajadas de queso que de jamón? Entiendo perfectamente la pregunta y sé bien cómo resolverla. De hecho, puedo hacerlo de varias maneras. Lo más natural sería contar. Pero cabe también intentar algo un poco más sofisticado. Preparo unos emparedados poniendo en cada uno de ellos una tajada de jamón y una de queso; dependiendo de cuáles se agotan primero, o si ocurre al tiempo, puedo saber si había más de unas que de otras o si había el mismo número. Pues bien, ¿no habría que hacer *lo mismo* (*o lo análogo*), pero ahora en el caso de los dos conjuntos infinitos? El asunto no es tan fácil. Mejor ni empezar, diría uno, pues nunca acabaría. Pero, ¿qué quiere decir aquí "hacer lo mismo"?, ¿qué es contar los elementos de un conjunto infinito? o ¿qué sería ir emparejando los elementos de dos conjuntos infinitos para ver si quedan o no sobrando elementos en alguno de los dos? No parece que esto esté determinado de una manera clara y unívoca y, por ello, el problema adoptaría la forma: "¿Cómo inventarse una analogía convincente y útil para determinar qué ha de valer aquí como 'hacer lo mismo'?" (nótese la diferencia con "¿cómo explorar la realidad matemática donde habitan los conjuntos infinitos para descubrir qué conjunto tiene más elementos?").

La pregunta tiene sentido, aunque es, ciertamente, un tanto vaga. Por una parte, no sabemos de antemano qué es lo que resultará más "convincente y útil". Por otra, aunque dicha pregunta le puede dar cierto sentido y cierta orientación a nuestros intentos de llegar a una respuesta (no es, como se pretende en la paradoja del Menón, que no sepamos en absoluto cómo buscar, ni cómo reconocer una buena respuesta si diéramos con ella), no tenemos aún métodos bien definidos para obtenerla. Tenemos técnicas que son muy útiles y tienen una aplicación clara, precisa e incuestionable para el caso de conjuntos finitos, pero que no sabemos bien cómo extender a conjuntos infinitos. Al menos, podemos partir de que lo que queremos es eso: inventar una analogía que permita extenderlas, al menos una de ellas, a este caso más complejo y así dar una solución al problema. La solución inventada, y finalmente aceptada, debe introducir un sentido claro y preciso a la expresión "mayor (igual) que"

de encontrar y de inventar *casos intermedios.* / El concepto de representación sinóptica es de fundamental significación para nosotros. Designa nuestra forma de representación, el modo en que vemos las cosas. (¿Es esto una '*Weltanschauung*'?) (*IF* § 122)".

Una diferencia importante entre las aplicaciones de este arte de inventar comparaciones en las matemáticas y en la filosofía de Wittgenstein es que en la última se usa para *eliminar o disolver* problemas, que son vistos como confusiones, mientras que en las primeras, si bien también cumple una función de esclarecimiento, se emplea para *solucionar* los problemas (incluso en los casos en que la solución es una prueba de imposibilidad; por ejemplo, no es posible una construcción, como la trisección del ángulo, no es posible hallar una medida común para el lado y la diagonal de un cuadrado, no es posible construir una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números naturales y el de los reales).

[“mayor (igual) cardinalidad” o “tiene más (el mismo número de) elementos”] cuando se trata de conjuntos infinitos, es decir, le debe dar un uso nuevo a este concepto e introducir criterios para tal fin, es decir, debe ampliar su gramática. Si bien ese uso es nuevo, no ha de ser arbitrario, ya que, precisamente, debe ser análogo a otros anteriores y ya acreditados. Si se objeta que todo puede ser visto como análogo a todo y que inventarse analogías sí es arbitrario, entonces es importante resaltar que hay criterios y consideraciones razonables para optar por una analogía en lugar de otra. Veamos unos ejemplos que ilustran esto.

En principio habría varias maneras, unas más ingeniosas, fructíferas y persuasivas que otras, de inventar las analogías que determinan lo que cuenta como “hacer lo mismo” y, de esta manera, ampliar la gramática. Por ejemplo, se puede ensayar esta: “Note que cuando un conjunto finito está incluido propiamente en otro, es decir, el segundo tiene todos los elementos que están en el primero y además algunos más, decimos que el segundo tiene mayor cardinalidad (tamaño, más elementos) que el primero. Ahora bien, el conjunto de los números reales contiene a todos los números naturales, pero tiene además otros números (negativos, fraccionarios, irracionales). Luego el conjunto de los números reales tiene mayor cardinalidad que el de los naturales. No era tan difícil”. A lo que un matemático seguramente replicaría: “¡No tan rápido! Su analogía da una posible respuesta a la pregunta, pero ella es muy limitada y no va a ser fructífera, pues se aplica a un caso. Solo compara la cardinalidad de conjuntos infinitos, cuando unos están incluidos en otros. Pero a los matemáticos nos gusta la generalidad. Queremos un criterio que sirva para comparar la cardinalidad de *cualesquiera* conjuntos infinitos, como sí lo tenemos para conjuntos finitos”.

He aquí otro intento: “Se trata de extender la noción de conteo a conjuntos infinitos; pero el problema es que no acabaríamos nunca. Bueno, justamente puedo tomar eso como criterio: todos los conjuntos infinitos son inagotables si se trata de contar sus elementos (y no solo en la práctica, sino por principio), por lo tanto son todos, por supuesto, de mayor tamaño que los finitos, y todos de igual cardinalidad entre sí (la cardinalidad infinita o inagotable)”. El matemático podría ahora responder: “Eso no resulta nada interesante. No añade nada a lo que ya sabíamos. Nuestras matemáticas no avanzan, no se ven enriquecidas con su sugerencia. Es un criterio burdo que pone a todos los conjuntos infinitos en el mismo saco; pero queremos hacer distinciones algo más finas”.

Miremos, sin mayores dilaciones, la analogía que se impuso y cómo la demostración da un sentido al teorema mismo, esto es, al concepto “mayor que” en el contexto del enunciado del teorema. Cantor emplea el criterio del emparejamiento, o sea, la posibilidad de hacer corresponder a cada elemento de un conjunto uno y solo uno del otro, para establecer si son del mismo tamaño o no (como en el ejemplo de los emparedados con una tajada de jamón y una de queso). Este es un criterio que promete ser aplicable, en principio, a cualesquiera conjuntos infinitos. Pero esto no resuelve del todo el problema, pues si uno trata de hacer directamente el emparejamiento, como en el caso del contar, no se agotan los elementos de ninguno de los dos conjuntos. Se trata de mostrar que no se puede hacer. De nuevo, en el caso de conjuntos finitos hay un modo de mostrarlo que se entiende bien: intente el emparejamiento hasta que se agoten los elementos de un conjunto y muestre que en el otro conjunto quedan elementos sin su pareja. Pero, ¿cómo mostrar la imposibilidad de la correspondencia uno a uno, si los conjuntos son infinitos? Cantor la muestra mediante un argumento indirecto, por reducción al absurdo. Asumiendo que se tuviese ya un modo de hacer la correspondencia uno a uno que presuntamente establecería que hay tanto números naturales como números reales entre 0 y 1 (esta restricción se hace para simplificar el argumento), se da una regla, el famoso procedimiento de diagonalización, para construir un número real entre 0 y 1, que difiere de todos los que tienen su pareja en virtud de tal correspondencia. Luego, en realidad la correspondencia no es uno a uno: hay números reales que han quedado sin su correspondiente número natural.

En lugar de imaginarnos algo que, tomado literalmente, es absurdo, a saber, que el procedimiento empleado por Cantor permite de un modo misterioso realizar una tarea "infinita": examinar exhaustivamente cualquier lista infinita de números reales y descubrir, para cada una de ellas, un número real que no está en la lista; es decir, en lugar de imaginarnos que la demostración nos permite descubrir algo que de hecho es cierto sobre conjuntos actualmente infinitos en la realidad matemática, podemos *ver el argumento de otro modo* más inteligible: *como* una analogía que inventa Cantor y que nos resulta convincente, para extender lo que ocurre en casos finitos a casos sobre lo infinito. Con el fin de verlo así, lo reescribimos informalmente y en términos muy diferentes a los de la demostración original.

Dada la lista finita:

1. 0,**8**353
2. 0,4**7**54
3. 0,39**9**1
4. 0,853**8** …

podemos construir, siguiendo una regla, un número entre 0 y 1 con 4 cifras decimales que es diferente de los cuatro que están listados. La regla es: construya un número entre 0 y 1 sumando 1 a los dígitos que aparecen en la diagonal de la lista (los resaltados en **negrilla**), si son distintos de 9; si el dígito es 9, en lugar de sumarle 1 (pues ya no daría un dígito entre 0 y 9), reemplácelo por 0. Aplicando la regla a nuestra lista se obtiene 0,9809, que es distinto a los 4 de la lista. Podemos estar seguros de que lo es, pues hemos cambiado, para formar el nuevo número, un dígito de cada uno de los 4 números (el que aparece en la diagonal).

Análogamente, se puede emplear la regla con listas de 5 (6, 7,…) números entre 0 y 1, con 5 (6, 7,...) cifras decimales, para construir un número con esas mismas cifras decimales que no aparece en la lista. La regla no se puede aplicar en la práctica para listas muy grandes, mucho menos para una "lista infinita". Pero la demostración de Cantor nos da una razón para afirmar que "lo mismo" ocurriría si la lista fuese infinita. Se hace aquí la analogía que es la clave para resolver el problema.

Tomada al pie de la letra, sin atender a su demostración, la proposición: "dada *cualquier* lista infinita de números reales entre 0 y 1, se puede construir un número real entre 0 y 1 que no está en la lista" (de la cual se infiere que "hay más números reales entre 0 y 1 que números naturales") no tiene un sentido claro. El procedimiento de Cantor, que hemos reformulado como una analogía, le da un sentido a la proposición y nos da una razón para aceptarla como verdadera.

El mérito, como la dificultad del logro de Cantor, radica no en que ya hubiéramos tenido un procedimiento solo que era muy complejo y laborioso aplicarlo a totalidades infinitas (¡esto es incomprensible!), sino en que, justamente, había que *inventar* el procedimiento que debía contar, en este caso como un buen símil de aquel que ya teníamos, e *inventar* exigía sobretodo creatividad, originalidad e ingenio, es decir, requería las capacidades del artista, más que las del explorador.

Varias cosas se quieren ilustrar con el ejemplo que acabamos de examinar: 1) En la búsqueda de la solución del problema no se emplea en absoluto la imagen de la concordancia con una realidad abstracta. 2) La solución puede verse como la invención de una analogía adecuada, no en el sentido de adecuarse a la realidad, sino en el de tener aplicación general, ser fructífera, rica en consecuencias matemáticas. 3) Hay varias analogías que pueden proponerse, unas más prometedoras que otras. 4) Una vez aceptada la demostración que resuelve el problema, ella le da un sentido claro al teorema demostrado, al extender en cierta dirección y precisar el sentido de ciertos conceptos clave que aparecen en él (en el caso del teorema de Cantor, se extiende el concepto "mayor que" a casos donde no era claro, ni estaba bien determinado cómo usarlo).

Aún si se acepta que la imagen del matemático como inventor resalta estos aspectos, no parece que ella aclare bien el carácter necesario que asociamos con las demostraciones y las proposiciones de las matemáticas. Vista la demostración como una suerte de analogía, no habría nada que fuerce, estrictamente hablando, a aceptar una analogía en lugar de otra. Si bien es cierto que, de acuerdo con esta imagen, no hay nada que obligue *factualmente* a aceptar una demostración, ella nos da otra manera de ver la noción de necesidad matemática (en todo caso, no la niega). No estamos, de hecho, obligados a aceptar una demostración matemática, pero una vez aceptada, usamos la proposición demostrada de manera rígida como un criterio o regla para aplicar, así como nos lo enseña o muestra la demostración, los conceptos que aparecen en ella. Nos obligamos a juzgar de acuerdo con lo que nos muestra la demostración, la volvemos una regla para el uso del lenguaje matemático, tanto en contextos matemáticos, como en contextos no matemáticos. Por ejemplo, si alguien me dice que ha encontrado una correspondencia uno a uno entre los números reales y los naturales, le diría: "no necesito ni mirar lo que has hecho, ello no es posible, ya hemos demostrado que no puede haberla. ¡No has aprendido la lección que nos dio Cantor!". La proposición demostrada excluye, en cuanto regla, modelo o caso paradigmático, ciertas posibilidades de nuestro lenguaje. Al respecto, Wittgenstein escribe:

> «Tú admites *esto*; entonces tienes que admitir *esto*.» – El *tiene que* admitirlo, ¡y al mismo tiempo es posible que no lo admita! Tú quieres decir: «si piensa, tiene que admitirlo.»
>
> «Te diré por qué has de admitirlo.» Pondré ante tus ojos un caso que, si lo consideras, te determinará a juzgar así.
>
> (…) ¡Piensa sólo cómo puede la figura que me muestras (o el procedimiento) comprometerme ahora a juzgar así y así siempre! (*LFM* I, §51 y §55).

Lo que hemos dicho sobre el problema de determinar si un conjunto infinito es más grande que otro, también aclara un poco una curiosa y, a primera vista, muy poco plausible observación de Wittgenstein sobre los problemas matemáticos:

> Los que uno llama problemas matemáticos pueden ser muy diversos. Están, por ejemplo, los problemas que uno le pone a un niño, para los cuales él da una respuesta de acuerdo con las reglas que le han sido enseñadas. Pero hay también aquellos a los que el matemático trata de darles respuesta y que están formulados sin que haya un método de solución. Estos son como el problema que planteó el rey en el cuento de hadas, al decirle a la princesa que viniera, pero ni desnuda, ni vestida. Ella llegó luciendo una red de pesca. Eso podría

> haberse llamado llegar ni desnuda, ni tampoco vestida. Él no sabía realmente lo que quería que ella hiciera, pero cuando ella llegó así, se vio forzado a aceptarlo. El problema era de la forma, haz algo que yo estaré inclinado a llamar ni desnuda, ni vestida. Es lo mismo con un problema matemático. Haz algo que yo estaré inclinado a aceptar como solución, si bien yo no sé ahora cómo pueda ser (*WL 1932-1935*, 186).

Poniéndose la red de pesca, la princesa le dio un uso nuevo, o por lo menos no habitual, que finalmente fue aceptado por el rey, a los conceptos "no desnudo" y "no vestido". En los que podrían considerarse como sus sentidos ordinarios, el problema suena contradictorio e insoluble (pues si se toman "vestido" y "desnudo" como opuestos, sus negaciones también lo serían). El matemático, para resolver algunos de sus problemas, debe, como la princesa, inventar nuevos sentidos o usos para los conceptos matemáticos, creando conexiones con usos ya habituales y acreditados en la práctica.

Trabajos citados

Cardona, Carlos. *Wittgenstein y Gödel. Debate acerca del sentido y la interpretación de las proposiciones matemáticas.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2004.

Davis, Philip J, & Reuben, Hersh. *The Mathematical Experience.* Boston: Birkhäuser, 1981.

Platón. *Menón, Crátilo, Fedón*. Trad. F. J. Olivieri. Madrid: Planeta DeAgostini, 1997.

Wittgenstein, L. *Wittgenstein's Lectures [WL 1932-1935]. Cambridge, 1932-1935*. Ed. Alice Ambrose. Chicago: The University of Chicago Press, 1982.

—. *Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas [OFM]*. Trad. Isidoro Reguera. Madrid: Alianza Editorial, 1987.

—. *Investigaciones filosóficas [IF]*. Trad. Alfonso García Suárez y Ulises Moulines. México - Barcelona: Universidad Nacional Autónoma de México - Editorial Crítica, 1988.

—. *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge, 1939 [LFM]*. Ed. Cora Diamond. Chicago: The University of Chicago Press, 1989.

—. *The Big Typescript [BT]*. Wiener Ausgabe. Ed. Michael Nedo. Wien: Springer-Verlag, 2000.